Matrice d'adjacence et chemins

Fiche méthode

(Maths expertes Terminale · Graphes et matrices)

La démarche face à une matrice d'adjacence

1. J'écris l'ordre des sommets à côté de la matrice, et je retiens : ligne = départ, colonne = arrivée.

2. Je contrôle la matrice : symétrique si le graphe n'est pas orienté, diagonale nulle sans boucle, somme des lignes égale aux degrés.

3. Je choisis la bonne puissance : M^k pour des chemins de longueur k, les puissances successives pour une distance, $M + M^2 + \cdots + M^{n-1}$ pour la connexité.

4. Je conclus en citant le théorème : « d'après le cours, le coefficient ligne i, colonne j de M^k est le nombre de chemins de longueur k de i à j ».

Le réflexe — un nombre lu dans une matrice ne rapporte rien sans la phrase qui l'interprète : quel coefficient, de quelle puissance, et ce qu'il compte.

Cas 1 · Écrire la matrice d'adjacence

Réflexe — ordre des sommets écrit ; ligne i = arcs qui partent de i ; symétrique seulement si le graphe n'est pas orienté.

Exemple. Question type : « Écrire la matrice d'adjacence du graphe. » Exemple : graphe orienté de sommets 1, 2, 3, 4 et d'arcs $1 \to 3$, $2 \to 1$, $3 \to 2$, $3 \to 4$.

$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (ordre 1, 2, 3, 4).

M n'est pas symétrique : $m_{13} = 1$ mais $m_{31} = 0$. La ligne 4 est nulle : aucun arc ne part de 4.

Attention — m_{13} se lit « de 1 vers 3 » : intervertir ligne et colonne change la réponse dans un graphe orienté.

Cas 2 · Degrés et nombre d'arêtes

Réflexe — degré = somme de la ligne ; nombre d'arêtes = somme totale ÷ 2 si le graphe n'est pas orienté.

Exemple. Question type : « Déterminer le degré de chaque sommet et le nombre d'arêtes. » Exemple : graphe non orienté de sommets A, B, C, D, E et de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Sommes des lignes : $d(A) = 3$, $d(B) = 2$, $d(C) = 4$, $d(D) = 3$, $d(E) = 2$.

Somme de tous les coefficients : $3 + 2 + 4 + 3 + 2 = 14$, donc le graphe a $14 \div 2 = 7$ arêtes.

Attention — graphe orienté : ligne = degré sortant, colonne = degré entrant, somme totale = nombre d'arcs sans diviser par 2.

Cas 3 · Compter des chemins de longueur k

Réflexe — coefficient (i ; j) de M^k ; un seul coefficient : ligne i de M^{k-1} × colonne j de M.

Exemple. Question type : « Combien y a-t-il de chemins de longueur 3 de B à D ? Les citer. » Exemple : graphe d'arêtes A–B, B–C, C–D, D–A, A–C (ordre A, B, C, D), avec $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$(M^3)_{24}$ = ligne 2 de M^2 × colonne 4 de M : $1 \times 1 + 2 \times 0 + 1 \times 1 + 2 \times 0 = 2$.
D'après le cours, il y a 2 chemins de longueur 3 de B à D : B–A–C–D et B–C–A–D.

Attention — M^2 se calcule ligne par colonne, ce n'est pas la matrice des carrés des coefficients.

Cas 4 · Chemins fermés et triangles

Réflexe — diagonale de M^k = chemins fermés ; triangles = trace de $M^3 \div 6$; circuits de longueur 3 (orienté) = trace ÷ 3.

Exemple. Question type : « Combien le graphe a-t-il de triangles ? » Exemple : graphe d'arêtes A–B, B–C, C–A, C–D, D–E, E–C, dont la diagonale de M^3 vaut $(2, 2, 4, 2, 2)$.

Trace de M^3 : $2 + 2 + 4 + 2 + 2 = 12$. Chaque triangle est compté 6 fois (trois départs, deux sens) : $12 \div 6 = 2$ triangles, A–B–C et C–D–E.
$(M^3)_{33} = 4 = 2 \times 2$: C appartient aux deux triangles.

Attention — $(M^4)_{ii}$ compte aussi les allers-retours : ce n'est pas un nombre de cycles.

Cas 5 · Distance et connexité

Réflexe — distance = première puissance de M dont le coefficient (i ; j) n'est pas nul ; connexité : $M + \ldots + M^{n-1}$ sans zéro hors diagonale.

Exemple. Question type : « Déterminer d(2 ; 1). » Exemple : graphe orienté d'arcs $1 \to 2$, $2 \to 3$, $3 \to 4$, $4 \to 1$, $1 \to 3$.

Ligne 2 : (0 0 1 0) dans M, (0 0 0 1) dans M^2, (1 0 0 0) dans M^3. Le coefficient (2 ; 1) vaut 0, 0 puis 1.
Donc $d(2\,;1) = 3$, par $2 \to 3 \to 4 \to 1$. Le raccourci $1 \to 3$ ne sert pas : il part de 1.

Attention — $(M^3)_{i\,j} > 0$ ne suffit pas pour une distance de 3 : il faut que M et M^2 donnent 0.

Les pièges

- Ligne = départ, colonne = arrivée ; l'ordre des sommets est toujours écrit.
- Somme totale = 2m seulement si le graphe n'est pas orienté.
- M^k compte tous les chemins, même ceux qui repassent par un sommet.
- Trace de M^3 : diviser par 6 pour les triangles, par 3 pour les circuits orientés.
- Distance : vérifier les puissances inférieures dans l'ordre.
- Connexité d'un graphe d'ordre n : aller jusqu'à M^{n-1}.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).