

Devoir surveillé – Graphes — matrice d'adjacence et chemins

Représenter un graphe par une matrice, calculer la puissance d'une matrice pour compter les chemins
(programme Maths expertes Terminale)

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths expertes (option Tle) Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Lire et écrire une matrice d'adjacence (4 pts)

- a) a) Le graphe orienté $\mathcal{G}$ a pour sommets A, B, C, D (dans cet ordre) et pour arcs $A \rightarrow C, B \rightarrow A, B \rightarrow D, C \rightarrow B, D \rightarrow A, D \rightarrow C$. Écrire sa matrice d'adjacence M .
- b) b) Calculer la somme de tous les coefficients de M et interpréter ce nombre.
- c) c) Déterminer le degré sortant et le degré entrant du sommet A en précisant comment on les lit sur M .
- d) d) La matrice M est-elle symétrique ? Expliquer ce que la réponse signifie pour le graphe.

Exercice 2 – Puissances et comptage de chaînes (4 pts)

- a) a) Le graphe non orienté $\mathcal{H}$ a pour sommets P, Q, R, S, T (dans cet ordre) et pour arêtes $P - Q, P - R, P - S, Q - R, R - S, S - T$. Écrire sa matrice d'adjacence M .
- b) b) Calculer M^2 .
- c) c) Donner le nombre de chaînes de longueur 2 reliant Q à T et interpréter ce résultat sur le graphe.
- d) d) En calculant uniquement le coefficient utile de M^3 , déterminer $d(Q; T)$ et donner toutes les chaînes minimales correspondantes.

Exercice 3 – Distance, excentricité et diamètre (4 pts)

- a) a) Le graphe non orienté $\mathcal{K}$ a pour sommets $1, 2, 3, 4, 5, 6$ (dans cet ordre) et pour arêtes $1 - 2, 1 - 3, 2 - 3, 3 - 4, 4 - 5, 4 - 6, 5 - 6$. Écrire sa matrice d'adjacence M .
- b) b) Déterminer $d(1; 6)$ en justifiant par les puissances de M .
- c) c) Déterminer l'excentricité de chacun des six sommets, puis le diamètre de $\mathcal{K}$.
- d) d) Un élève affirme : « il suffit d'ajouter l'arête $1 - 6$ pour que le diamètre devienne égal à 2 ». Expliquer son erreur.

Exercice 4 – Plus court chemin dans un réseau pondéré (4 pts)

- a) a) Un réseau routier relie les localités A, B, C, D, E, F ; les distances, en kilomètres, sont $A - B$ (6), $A - C$ (11), $B - C$ (3), $B - E$ (19), $C - D$ (8), $C - E$ (15), $D - E$ (4), $D - F$ (12), $E - F$ (5). Appliquer l'algorithme de Dijkstra à partir de A en présentant un tableau complet.
- b) b) En déduire un plus court chemin de A à F et sa longueur.
- c) c) Donner la distance minimale de A à E et le chemin correspondant.
- d) d) La route $C - D$ est coupée. Déterminer le nouveau plus court chemin de A à F et sa longueur.

Exercice 5 – Chaînes d'un graphe en ligne*(4 pts)*

- a) a) Le graphe non orienté $\mathcal{L}$ a pour sommets 1, 2, 3, 4 (dans cet ordre) et pour arêtes 1 – 2, 2 – 3, 3 – 4. Écrire M , puis justifier que le coefficient d'indices i et j de M^2 est le nombre de chaînes de longueur 2 de i à j .
- b) b) Calculer M^2 et M^3 , puis en déduire $d(1; 4)$.
- c) c) Montrer qu'il n'existe aucune chaîne de longueur paire reliant 1 à 4.
- d) d) On donne la première ligne de M^5 : (0 5 0 3). En utilisant l'égalité $M^7 = M^5 \times M^2$, déterminer le nombre de chaînes de longueur 7 reliant 1 à 4.

Bon courage !