

Corrigé et barème – Graphes — matrice d'adjacence et chemins

Représenter un graphe par une matrice, calculer la puissance d'une matrice pour compter les chemins
(programme Maths expertes Terminale)

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths expertes (option Tle) Terminale

Exercice 1 – Lire et écrire une matrice d'adjacence

(4 pts)

- a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (ligne = sommet d'origine, colonne = sommet d'arrivée). (1)
- b) Somme = $1 + 2 + 1 + 2 = 6$: le graphe possède 6 arcs (pas de division par 2, le graphe est orienté). (1)
- c) Ligne 1 : $0 + 0 + 1 + 0 = 1$, degré sortant de A égal à 1. Colonne 1 : $0 + 1 + 0 + 1 = 2$, degré entrant de A égal à 2 (arcs $B \rightarrow A$ et $D \rightarrow A$). (1)
- d) Non : $m_{13} = 1$ et $m_{31} = 0$. L'arc $A \rightarrow C$ existe sans l'arc $C \rightarrow A$: le graphe est réellement orienté (une matrice symétrique caractériserait un graphe non orienté). (1)

Repère — Une ligne se lit « ce qui part du sommet », une colonne « ce qui y arrive » : ne jamais intervertir les deux dans un graphe orienté.

Exercice 2 – Puissances et comptage de chaînes

(4 pts)

- a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; la matrice est bien symétrique, de diagonale nulle. (1)
- b) $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (chaque ligne de M^2 est la somme des lignes de M associées aux voisins du sommet). (1)
- c) Le coefficient d'indices 2 et 5 de M^2 vaut 0 : aucune chaîne de longueur 2 ne relie Q à T . En effet le seul voisin de T est S , et Q n'est pas voisin de S . (1)
- d) $(M^3)_{QT} =$ ligne Q de M^2 multipliée par la colonne T de M : $(1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 0) \times (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)^T = 2$. Comme les coefficients correspondants de M et M^2 sont nuls, $d(Q; T) = 3$, par $Q - P - S - T$ et $Q - R - S - T$. (1)

Le point clé — Pour une distance, on examine les puissances dans l'ordre croissant et on s'arrête à la première dont le coefficient est non nul.

Exercice 3 – Distance, excentricité et diamètre

(4 pts)

a)
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

- b) Première ligne de M^2 : $L_2 + L_3 = (2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0)$, dont le dernier coefficient est nul ; première ligne de M^3 : $2L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = (2 \ 3 \ 4 \ 1 \ 1 \ 1)$, de dernier coefficient 1. Donc $d(1; 6) = 3$, par la chaîne $1 - 3 - 4 - 6$. (1)
- c) Excentricités : 3 pour les sommets 1, 2, 5 et 6 ; 2 pour les sommets 3 et 4. Le diamètre est le maximum de ces valeurs, soit 3 (atteint par exemple pour $d(1; 6)$ et $d(2; 5)$). (1)
- d) Avec l'arête $1 - 6$, on a bien $d(1; 6) = 1$, mais $d(2; 5)$ reste égal à 3 : les voisins de 2 sont 1 et 3, or ni 1 ni 3 n'est voisin de 5, donc aucune chaîne de longueur 2 ne relie 2 à 5. Le diamètre reste 3 : réduire une seule distance ne réduit pas le maximum de toutes les distances. (1)

Erreur fréquente — Le diamètre est un maximum : il ne diminue que si l'on améliore le couple de sommets qui le réalise, et tous ceux qui l'égalent.

Exercice 4 – Plus court chemin dans un réseau pondéré

(4 pts)

- a) Tableau (valeur provisoire et sommet de provenance) : étape 1, $A = 0$; étape 2, $B = 6 (A)$, $C = 11 (A)$, on marque B ; étape 3, $C = 9 (B)$, $E = 25 (B)$, on marque C ; étape 4, $D = 17 (C)$, $E = 24 (C)$, on marque D ; étape 5, $E = 21 (D)$, $F = 29 (D)$, on marque E ; étape 6, $F = 26 (E)$, on marque F . (1)
- b) En remontant les provenances : $A - B - C - D - E - F$, de longueur $6 + 3 + 8 + 4 + 5 = 26$ km. (1)
- c) La valeur définitive de E est 21, atteinte depuis D : le chemin est $A - B - C - D - E$, soit $6 + 3 + 8 + 4 = 21$ km. (1)
- d) Sans l'arête $C - D$: $B = 6$, puis $C = 9 (B)$, puis $E = 24 (C)$, puis $D = 28 (E)$ et $F = 29 (E)$; le passage par D donnerait $28 + 12 = 40 > 29$. Le nouveau chemin est $A - B - C - E - F$, de longueur $6 + 3 + 15 + 5 = 29$ km, soit 3 km de plus. (1)

Attention — Une valeur provisoire n'est remplacée que si le nouveau total est strictement plus petit : on compare des poids cumulés depuis le départ, jamais des arêtes isolées.

Exercice 5 – Chaînes d'un graphe en ligne*(4 pts)*

a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Par définition du produit, $(M^2)_{ij} = \sum_r m_{ir}m_{rj}$; le terme $m_{ir}m_{rj}$ vaut 1

exactement lorsque $i - r - j$ est une chaîne, et 0 sinon : la somme compte donc les chaînes de longueur 2 de i à j . (1)

b) $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Les coefficients d'indices 1 et 4 valent 0 dans M et

M^2 , puis 1 dans M^3 : $d(1;4) = 3$ (chaîne $1 - 2 - 3 - 4$). (1)

c) On range les sommets en deux groupes $\{1;3\}$ et $\{2;4\}$: chaque arête relie un sommet d'un groupe à un sommet de l'autre. Une chaîne de longueur paire revient donc dans le groupe de départ ; or 1 et 4 ne sont pas dans le même groupe. Il ne peut exister de chaîne de longueur paire entre eux (ce que confirme $(M^4)_{14} = 0$). (1)

d) $(M^7)_{14}$ = première ligne de M^5 multipliée par la quatrième colonne de M^2 , soit $(0 \ 5 \ 0 \ 3) \times (0 \ 1 \ 0 \ 1)^T = 5 \times 1 + 3 \times 1 = 8$. Il existe 8 chaînes de longueur 7 reliant 1 à 4. (1)

À retenir — La relation $M^{p+q} = M^p \times M^q$ évite de calculer toutes les puissances intermédiaires : un seul produit ligne-colonne suffit pour un coefficient.