Équations polynomiales

Fiche méthode

(Maths expertes Terminale · Nombres complexes · Équations polynomiales)

La démarche pour résoudre une équation polynomiale

1. Je regarde le degré et la forme : second degré, $z^n = a^n$, bicarrée, racine donnée ou à deviner.

2. Je factorise pour me ramener au second degré : $z^n - a^n$, facteur $z - \alpha$, facteur $z^2 - 2\,\mathrm{Re}(\alpha)\,z + |\alpha|^2$, identification.

3. Je résous chaque facteur du second degré avec Δ (deux solutions conjuguées si $\Delta < 0$).

4. Je rassemble et je compte : toutes les racines, sans perdre la racine de départ, au plus n pour un degré n ; je contrôle avec le produit ou la somme.

Le réflexe — un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul : factoriser, c'est découper l'équation en équations plus simples.

Cas 1 · Second degré dans $\mathbb{R}$ (rappels de 1re)

Réflexe — je teste 1 et -1, sinon je calcule Δ ; je factorise par $a(x - x_1)(x - x_2)$ en gardant a devant.

Exemple. Questions types : « Résoudre dans $\mathbb{R}$ », « Factoriser ». Exemple : $2x^2 + x - 6 = 0$.

$\Delta = 1 + 48 = 49$, donc $x_1 = \dfrac{-1-7}{4} = -2$ et $x_2 = \dfrac{-1+7}{4} = \dfrac{3}{2}$.

Factorisation : $2x^2 + x - 6 = (x+2)(2x-3)$.

Contrôle : produit $-2 \times \dfrac{3}{2} = -3 = \dfrac{c}{a}$.

Attention — $(-b)^2$ est positif ; et on n'oublie pas le coefficient a dans la factorisation.

Cas 2 · Second degré dans $\mathbb{C}$

Réflexe — $\Delta < 0$: j'écris $\Delta = (i\sqrt{(-\Delta)})^2$, puis $z = (-b \pm i\sqrt{(-\Delta)})/(2a)$, et je contrôle par le produit c/a.

Exemple. Questions types : « Résoudre dans $\mathbb{C}$ », « Donner une équation dont … est solution ». Exemple : $3z^2 - 6z + 4 = 0$.

$\Delta = 36 - 48 = -12 = \left(2i\sqrt{3}\right)^2$.

$z = \dfrac{6 \pm 2i\sqrt{3}}{6} = 1 \pm \dfrac{\sqrt{3}}{3}i$.

Contrôle : $1 + \dfrac{3}{9} = \dfrac{4}{3} = \dfrac{c}{a}$.

Attention — on n'écrit pas $\sqrt{-12}$; et 2a divise aussi la partie imaginaire.

Cas 3 · Résoudre $z^n = a^n$

Réflexe — j'écris la constante comme une puissance n-ième, je factorise $z^n - a^n$ par $z - a$, puis je résous le second facteur.

Exemple. Questions types : « Factoriser $z^n - a^n$ », « Résoudre $z^3 = \ldots$ ». Exemple : $z^3 = 216$.

$216 = 6^3$, donc $z^3 - 216 = (z-6)(z^2 + 6z + 36)$.

$z^2 + 6z + 36 = 0$: $\Delta = 36 - 144 = -108 = \left(6i\sqrt{3}\right)^2$, d'où $z = -3 \pm 3i\sqrt{3}$.

$\mathcal{S} = \left\{6\,;\, -3 + 3i\sqrt{3}\,;\, -3 - 3i\sqrt{3}\right\}$.

Attention — $z^3 - a^3$ n'est pas $(z-a)^3$; pour $z^3 + a^3$, on écrit $a^3 = -(-a)^3$.

Cas 4 · Degré 3 avec une racine connue

Réflexe — je vérifie $P(\alpha)=0$, j'écris $P(z)=(z-\alpha)(z^2+bz+c)$, je développe et j'identifie, la dernière équation sert de vérification.

Exemple. Questions types : « Vérifier que … est racine », « Factoriser », « Résoudre ». Exemple : $P(z)=z^3+z^2-2$.

$P(1)=1+1-2=0$. Pour tout z, $(z-1)(z^2+bz+c)=z^3+(b-1)z^2+(c-b)z-c$.
$b-1=1$, donc $b=2$; $c-b=0$, donc $c=2$; vérification : $-c=-2$.
$z^2+2z+2=0$: $\Delta=-4=(2i)^2$, $z=-1\pm i$. $\mathcal{S}=\{1\,;-1+i\,;-1-i\}$.

Attention — la racine α fait partie des solutions : ne pas la perdre après la factorisation.

Cas 5 · Compter les racines

Réflexe — degré au plus n et $n+1$ racines : polynôme nul ; deux polynômes de degré au plus n égaux en $n+1$ nombres : égaux.

Exemple. Questions types : « Montrer que P est nul », « Montrer que $A=B$ », « A-t-on toutes les solutions ? ». Exemple : B de degré au plus 2 avec $B(0)=1$, $B(1)=3$, $B(-1)=1$.

$A(z)=z^2+z+1$ vérifie $A(0)=1$, $A(1)=3$ et $A(-1)=1$.
$A-B$ est de degré au plus 2 et s'annule en trois nombres distincts : c'est le polynôme nul.
Donc $B(z)=z^2+z+1$ pour tout z.

Attention — « au plus n » racines, pas « exactement n » : une racine double compte pour une solution.

Les pièges

- « $\Delta<0$, donc pas de solution » : vrai dans $\mathbb{R}$, faux dans $\mathbb{C}$.
- $\sqrt{-16}$ n'a pas de sens : on écrit $-16=(4\mathrm{i})^2$.
- $z^3-1\,000\neq(z-10)^3$: $z^3-1\,000=(z-10)(z^2+10z+100)$.
- Racines conjuguées : seulement si les coefficients sont réels.
- Après la factorisation par $z-\alpha$, l'ensemble des solutions contient α.
- Degré n : au plus n racines, pas forcément n racines distinctes.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).