Équations polynomiales

Fiche tableaux : formules à connaître

(Maths expertes Terminale)

Second degré à coefficients réels

Signe de $\Delta = b^2 - 4ac$	Solutions dans $\mathbb{R}$	Solutions dans $\mathbb{C}$
$\Delta > 0$	$\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	les mêmes
$\Delta = 0$	$-\dfrac{b}{2a}$	la même
$\Delta < 0$	aucune	$\dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$, conjuguées

Dans tous les cas : $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$, $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$. Exemple : $z^2 + 2z + 10 = 0$ donne $z = -1 \pm 3i$.

Factorisations de $z^n - a^n$

n	Factorisation
2	$z^2 - a^2 = (z - a)(z + a)$
3	$z^3 - a^3 = (z - a)(z^2 + az + a^2)$
4	$z^4 - a^4 = (z - a)(z^3 + az^2 + a^2 z + a^3)$
n	$z^n - a^n = (z - a)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k z^{n-1-k}$
somme de cubes	$z^3 + a^3 = (z + a)(z^2 - az + a^2)$

Avec $a = 1$: $1 + z + \cdots + z^{n-1} = \dfrac{z^n - 1}{z - 1}$ pour $z \neq 1$.

Factoriser avec une racine connue

Racine connue	Forme à identifier
α (P de degré 3, unitaire)	$(z - \alpha)(z^2 + bz + c) = z^3 + (b - \alpha)z^2 + (c - \alpha b)z - \alpha c$
α non réel, coefficients réels	$(z - \alpha)\,(z - \overline{\alpha}) = z^2 - 2\,\mathrm{Re}(\alpha)\,z + \lvert\alpha\rvert^2$
iy imaginaire pur	$\mathrm{Re}\,(P(iy)) = 0$ et $\mathrm{Im}\,(P(iy)) = 0$

Exemple : pour $\alpha = 5 + i$, le facteur réel est $z^2 - 10z + 26$.

Nombre de racines

Situation	Conclusion
P de degré n	au plus n racines distinctes
$\deg P \leqslant n$ et $n + 1$ racines	P est le polynôme nul
$\deg A, \deg B \leqslant n$, égaux en $n + 1$ nombres	$A = B$ (mêmes coefficients)
coefficients réels, degré impair	au moins une racine réelle

Exemple : $(z - 2)^2(z + 5)$ est de degré 3 mais n'a que deux racines, 2 et -5.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).