

Devoir surveillé – Équations polynomiales à coefficients réels

Équations du second degré à coefficients réels dans $\mathbb{C}$, factorisation de $z^n - a^n$, racines d'un polynôme, équations de degré 3 avec une racine connue

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths expertes (option Tle) Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Second degré dans $\mathbb{C}$

(4 pts)

- a) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 + 8z + 25 = 0$.
- b) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $5z^2 - 4z + 1 = 0$.
- c) Déterminer une équation du second degré à coefficients réels dont $6 + i$ est solution.
- d) Un élève écrit : « $\Delta = -16 < 0$, donc l'équation $z^2 - 10z + 29 = 0$ n'a pas de solution. » Expliquer l'erreur, puis résoudre l'équation dans $\mathbb{C}$.

Exercice 2 – Factorisation de $z^n - a^n$

(4 pts)

- a) Factoriser $z^3 - 343$ par $z - 7$.
- b) Résoudre $z^3 = 343$ dans $\mathbb{C}$.
- c) Factoriser $z^6 - 1$ par $z - 1$.
- d) Justifier que l'équation $z^6 = 1$ a au plus six solutions dans $\mathbb{C}$, et en donner deux réelles.

Exercice 3 – Degré 3 : racine à deviner

(4 pts)

- a) Soit $P(z) = z^3 + 7z^2 + 17z + 11$. Déterminer une racine entière de P .
- b) Déterminer les réels b et c tels que, pour tout z , $P(z) = (z + 1)(z^2 + bz + c)$.
- c) Résoudre $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.
- d) Montrer que les deux solutions non réelles ont le même module et le calculer.

Exercice 4 – Degré 4 : racine non réelle connue

(4 pts)

- a) Soit $P(z) = z^4 - 2z^3 + 18z^2 - 2z + 17$. Calculer $P(i)$.
- b) Justifier que $-i$ est aussi racine de P .
- c) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout z , $P(z) = (z^2 + 1)(z^2 + az + b)$.
- d) Résoudre $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 5 – Paramètre et nombre de racines

(4 pts)

- a) Soit k un réel et $P(z) = z^3 + kz^2 + 25z + 50$. Exprimer $P(5i)$ en fonction de k .
- b) En déduire la valeur de k pour laquelle $5i$ est racine de P .
- c) Pour cette valeur de k , factoriser $P(z)$ et résoudre $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.
- d) Existe-t-il un polynôme de degré 3 qui s'annule en $5i$, $-5i$, -2 et 1 ? Justifier.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).