

Corrigé et barème – Équations polynomiales à coefficients réels

Équations du second degré à coefficients réels dans $\mathbb{C}$, factorisation de $z^n - a^n$, racines d'un polynôme, équations de degré 3 avec une racine connue

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths expertes (option Tle) Terminale

Exercice 1 – Second degré dans $\mathbb{C}$

(4 pts)

- a) $\Delta = 64 - 100 = -36 = (6i)^2$; $z = \frac{-8 \pm 6i}{2}$, $S = \{-4 + 3i; -4 - 3i\}$. (1)
- b) $\Delta = 16 - 20 = -4 = (2i)^2$; $z = \frac{4 \pm 2i}{10}$, $S = \{\frac{2+i}{5}; \frac{2-i}{5}\}$. (1)
- c) L'autre solution est $6 - i$; somme 12, produit $36 + 1 = 37$: $z^2 - 12z + 37 = 0$. (1)
- d) « Pas de solution » n'est vrai que dans $\mathbb{R}$. Dans $\mathbb{C}$: $-16 = (4i)^2$, $z = \frac{10 \pm 4i}{2}$, $S = \{5 + 2i; 5 - 2i\}$. (1)

Erreur fréquente — Un discriminant négatif donne deux solutions complexes conjuguées, jamais « aucune solution » dans $\mathbb{C}$.

Exercice 2 – Factorisation de $z^n - a^n$

(4 pts)

- a) $343 = 7^3$: $z^3 - 343 = (z - 7)(z^2 + 7z + 49)$. (1)
- b) $z = 7$ ou $z^2 + 7z + 49 = 0$: $\Delta = 49 - 196 = -147 = (7i\sqrt{3})^2$, $z = \frac{-7 \pm 7i\sqrt{3}}{2}$. (1)
- c) $z^6 - 1 = (z - 1)(z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$. (1)
- d) $z^6 - 1$ est de degré 6, donc a au plus 6 racines; $1^6 = 1$ et $(-1)^6 = 1$: 1 et -1 sont solutions. (1)

À retenir — Dans la factorisation de $z^n - a^n$, le second facteur compte n termes, de z^{n-1} à a^{n-1} .

Exercice 3 – Degré 3 : racine à deviner

(4 pts)

- a) $P(-1) = -1 + 7 - 17 + 11 = 0$: -1 est racine. (1)
- b) $(z + 1)(z^2 + bz + c) = z^3 + (b + 1)z^2 + (c + b)z + c$: $b = 6$, $c = 11$ (vérification $c + b = 17$). (1)
- c) $\Delta = 36 - 44 = -8 = (2i\sqrt{2})^2$; $S = \{-1; -3 + i\sqrt{2}; -3 - i\sqrt{2}\}$. (1)
- d) Elles sont conjuguées, donc de même module; $|z|^2 = z\bar{z} = \frac{c}{a} = 11$, d'où $|z| = \sqrt{11}$. (1)

Repère — Pour un polynôme unitaire à coefficients entiers, une racine entière divise le terme constant : on teste d'abord ± 1 .

Exercice 4 – Degré 4 : racine non réelle connue

(4 pts)

- a) $i^4 = 1$, $i^3 = -i$: $P(i) = 1 + 2i - 18 - 2i + 17 = 0$. (1)
- b) Coefficients réels: $P(-i) = P(\bar{i}) = \overline{P(i)} = 0$. (1)
- c) $(z^2 + 1)(z^2 + az + b) = z^4 + az^3 + (b + 1)z^2 + az + b$: $a = -2$, $b = 17$ (vérification $b + 1 = 18$). (1)
- d) $z^2 - 2z + 17 = 0$: $\Delta = 4 - 68 = -64 = (8i)^2$; $S = \{i; -i; 1 + 4i; 1 - 4i\}$. (1)

Le point clé — Une racine non réelle d'un polynôme à coefficients réels apporte son conjugué : on factorise directement par un trinôme réel.

Exercice 5 – Paramètre et nombre de racines*(4 pts)*

- a) $(5i)^2 = -25$, $(5i)^3 = -125i$: $P(5i) = -125i - 25k + 125i + 50 = 50 - 25k$. (1)
- b) $50 - 25k = 0 \iff k = 2$. (1)
- c) $P(z) = z^2(z + 2) + 25(z + 2) = (z + 2)(z^2 + 25)$; $S = \{-2 ; 5i ; -5i\}$. (1)
- d) Non : un polynôme non nul de degré 3 a au plus 3 racines ; quatre racines imposeraient le polynôme nul, qui n'est pas de degré 3. (1)

Attention — Pour tester une racine imaginaire pure, on annule à la fois la partie réelle et la partie imaginaire de $P(iy)$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).