Devoir surveillé – Nombres complexes : forme algébrique, équations polynomiales, forme exponentielle et géométrie — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths expertes Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes *(3 pts)*

a) Donner la forme algébrique de $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{6}$.

b) Déterminer les réels a et b tels que $-1+2i$ soit racine de z^3+az+b, puis résoudre l'équation $z^3+az+b=0$ dans $\mathbb{C}$.

c) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-3i|=2|z|$.

Exercice 2 – Démontrer *(4 pts)*

Les quatre questions sont indépendantes.

a) Démontrer que, pour tous complexes z et z', $|1-\overline{z}z'|^2-|z-z'|^2=\left(1-|z|^2\right)\left(1-|z'|^2\right)$. En déduire que si $|z|<1$ et $|z'|<1$, alors $|z-z'|<|1-\overline{z}z'|$.

b) Démontrer, par récurrence sur l'entier $n\geqslant 1$, qu'un polynôme de degré n admet au plus n racines dans $\mathbb{C}$. On pourra utiliser le résultat du cours : si P est de degré $n\geqslant 1$ et si $P(\alpha)=0$, il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que $P(z)=(z-\alpha)Q(z)$ pour tout complexe z.

c) Soit P un polynôme de degré 3 à coefficients réels, qui admet une racine non réelle α. Démontrer que P a exactement trois racines distinctes, dont une seule est réelle.

d) À l'aide des formules d'Euler, démontrer que, pour tous réels p et q, $\cos p+\cos q=2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$.

Exercice 3 – Problème — L'équation $(z+1)^n = (z-1)^n$ *(5 pts)*

Soit $n \geqslant 2$ un entier. On étudie l'équation $(E_n) : (z+1)^n = (z-1)^n$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, et l'on pose $Q_n(z) = (z+1)^n - (z-1)^n$.

a) Cas $n = 3$: développer $Q_3(z)$ et résoudre (E_3).

b) Cas général : à l'aide de la formule du binôme, démontrer que Q_n est un polynôme de degré $n-1$, de coefficient dominant $2n$. Combien l'équation (E_n) a-t-elle de solutions au plus ? Le nombre 1 est-il solution ?

c) Démontrer que z est solution de (E_n) si et seulement si $z \neq 1$ et $\dfrac{z+1}{z-1}$ est une racine n-ième de l'unité différente de 1. En déduire que les solutions de (E_n) sont les nombres $z_k = \dfrac{\omega_k + 1}{\omega_k - 1}$, où $\omega_k = \mathrm{e}^{2ik\pi/n}$ et $k \in \{1\,;2\,;\dots\,;n-1\}$.

d) Démontrer que, pour tout réel $\alpha \in \,]0\,;2\pi[$, $\dfrac{\mathrm{e}^{i\alpha}+1}{\mathrm{e}^{i\alpha}-1} = -i\,\dfrac{\cos(\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}$. En déduire que toutes les solutions de (E_n) sont imaginaires pures, et qu'il y en a exactement $n-1$.

e) Cas $n = 6$: développer $Q_6(z)$, résoudre (E_6) en posant $Z = z^2$, et vérifier que l'on retrouve les nombres $z_1, \dots, z_5$ du d).

Exercice 4 – Problème — Le triangle de sommets z, z², z³ *(4 pts)*

Pour tout complexe z, on note M, N et P les points d'affixes z, z^2 et z^3.

a) Dans cette question, $z = -1 + i$. Calculer z^2 et z^3, puis démontrer que le triangle MNP est rectangle isocèle en M.

b) On suppose désormais $z \notin \{-1\,;0\,;1\}$. Démontrer que les points M, N, P sont deux à deux distincts et que $\dfrac{z^3 - z}{z^2 - z} = z + 1$.

c) Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels le triangle MNP est rectangle en M.

d) Déterminer les valeurs de z pour lesquelles le triangle MNP est équilatéral, et préciser alors les points M, N, P.

Exercice 5 – Pour aller plus loin *(4 pts)*

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $A_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \cdots$ la somme des coefficients $\binom{n}{k}$ pour lesquels k est un multiple de 3 compris entre 0 et n. On pose $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$.

a) Écrire $1 + j$ et $1 + j^2$ sous forme exponentielle. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $(1+j)^n + \left(1+j^2\right)^n = 2\cos\dfrac{n\pi}{3}$.

b) On rappelle que, pour tout réel θ, $1 + \mathrm{e}^{i\theta} = 2\cos\dfrac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{i\theta/2}$ (factorisation par l'angle moitié).

Démontrer que, pour tout réel θ et tout entier $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta) = 2^n \cos^n\frac{\theta}{2}\,\cos\frac{n\theta}{2}$.

Contrôler cette égalité pour $n = 4$ et $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

c) Démontrer que, pour tout entier naturel k, $1 + j^k + j^{2k} = 3$ si k est un multiple de 3, et $1 + j^k + j^{2k} = 0$ sinon.

d) En calculant $(1+1)^n + (1+j)^n + \left(1+j^2\right)^n$ de deux façons, démontrer que $A_n = \dfrac{2^n + 2\cos(n\pi/3)}{3}$. Vérifier cette formule pour $n = 6$ par un calcul direct.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).