Corrigé et barème – Nombres complexes : forme algébrique, équations polynomiales, forme exponentielle et géométrie — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths expertes Terminale

Exercice 1 – Automatismes *(3 pts)*

a) $1+i\sqrt{3}=2\,\mathrm{e}^{i\pi/3}$ et $1-i=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\pi/4}$, donc $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{7i\pi/12}$. Par Moivre, la puissance vaut $\left(\sqrt{2}\right)^{6}\mathrm{e}^{42i\pi/12}=8\,\mathrm{e}^{7i\pi/2}$, et $\dfrac{7\pi}{2}=4\pi-\dfrac{\pi}{2}$: le résultat est $8\,\mathrm{e}^{-i\pi/2}=-8i$. (1 pt) (1)

b) $(-1+2i)^2=1-4i-4=-3-4i$ et $(-1+2i)^3=(-3-4i)(-1+2i)=3-6i+4i+8=11-2i$. La condition s'écrit $(11-a+b)+i(2a-2)=0$: $a=1$ et $b=-10$. Le polynôme z^3+z-10 est à coefficients réels, donc $-1-2i$ est aussi racine, et il se factorise par $(z+1)^2+4=z^2+2z+5$: $z^3+z-10=(z^2+2z+5)(z-2)$ (coefficients de z^3 et constantes). $\mathcal{S}=\{2\,;-1+2i\,;-1-2i\}$. (1 pt : 0,5 pour a et b, 0,5 pour la résolution) (1)

c) Avec $z=x+iy$ et les carrés (nombres positifs) : $x^2+(y-3)^2=4\left(x^2+y^2\right)$, soit $x^2+y^2-6y+9=4x^2+4y^2$, puis $3x^2+3y^2+6y-9=0$, c'est-à-dire $x^2+y^2+2y-3=0$, ou encore $x^2+(y+1)^2=4$. C'est le cercle de centre le point d'affixe $-i$ et de rayon 2. Contrôle avec $z=i$: $|-2i|=2=2\times|i|$. (1 pt) (1)

Astuce — Quand une égalité de distances n'a pas de lecture géométrique directe (ici un rapport 2), on pose $z=x+iy$, on élève au carré et l'on reconnaît un cercle grâce à la forme canonique.

Exercice 2 – Démontrer *(4 pts)*

a) Avec $|w|^2=w\overline{w}$ et $\overline{\overline{z}z'}=z\overline{z'}$: $|1-\overline{z}z'|^2=(1-\overline{z}z')\left(1-z\overline{z'}\right)=1-z\overline{z'}-\overline{z}z'+|z|^2|z'|^2$ et $|z-z'|^2=(z-z')\left(\overline{z}-\overline{z'}\right)=|z|^2-z\overline{z'}-\overline{z}z'+|z'|^2$. La différence vaut $1-|z|^2-|z'|^2+|z|^2|z'|^2=\left(1-|z|^2\right)\left(1-|z'|^2\right)$. Si $|z|<1$ et $|z'|<1$, ce produit est strictement positif, donc $|z-z'|^2<|1-\overline{z}z'|^2$; deux nombres positifs sont rangés comme leurs carrés : $|z-z'|<|1-\overline{z}z'|$. (1 pt : 0,5 pour l'identité, 0,5 pour l'inégalité) (1)

b) On note $\mathcal{P}(n)$: « tout polynôme de degré n a au plus n racines ». Initialisation : $az+b$ avec $a\neq0$ a pour seule racine $-\dfrac{b}{a}$. Hérédité : supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et soit P de degré $n+1$. Si P n'a pas de racine, c'est fini. Sinon, soit α une racine : $P(z)=(z-\alpha)Q(z)$ avec Q de degré n. Si $P(\beta)=0$, alors $(\beta-\alpha)Q(\beta)=0$, donc $\beta=\alpha$ ou $Q(\beta)=0$. Par hypothèse de récurrence, Q a au plus n racines, donc P en a au plus $n+1$. Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n\geqslant1$. (1 pt : 0,5 pour l'hérédité, 0,5 pour la rédaction complète) (1)

c) Notons $P(z)=a_3z^3+a_2z^2+a_1z+a_0$, coefficients réels, $a_3\neq0$. Par conjugaison, $P\left(\overline{\alpha}\right)=\overline{P(\alpha)}=0$, et $\overline{\alpha}\neq\alpha$ car α n'est pas réel. On écrit $P(z)=(z-\alpha)Q(z)$ avec Q de degré 2 ; alors $0=P\left(\overline{\alpha}\right)=\left(\overline{\alpha}-\alpha\right)Q\left(\overline{\alpha}\right)$, donc $Q\left(\overline{\alpha}\right)=0$ et $Q(z)=\left(z-\overline{\alpha}\right)R(z)$ avec R de degré 1, de coefficient dominant a_3 : $R(z)=a_3(z-r)$. Ainsi $P(z)=a_3\left(z^2-2\,\mathrm{Re}(\alpha)\,z+|\alpha|^2\right)(z-r)$. Le terme constant donne $a_0=-a_3|\alpha|^2r$, donc $r=-\dfrac{a_0}{a_3|\alpha|^2}$ est réel. Les racines α, $\overline{\alpha}$ (non réelles, distinctes) et r (réel) sont trois racines distinctes ; un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs l'est, donc P n'a pas d'autre racine, et seule r est réelle. (1 pt : 0,5 pour la factorisation, 0,5 pour r réel et la conclusion) (1)

d) On pose $s=\dfrac{p+q}{2}$ et $d=\dfrac{p-q}{2}$, de sorte que $s+d=p$ et $s-d=q$. Par Euler : $2\cos s\cos d=2\times\dfrac{\mathrm{e}^{is}+\mathrm{e}^{-is}}{2}\times\dfrac{\mathrm{e}^{id}+\mathrm{e}^{-id}}{2}=\dfrac{\mathrm{e}^{i(s+d)}+\mathrm{e}^{i(s-d)}+\mathrm{e}^{-i(s-d)}+\mathrm{e}^{-i(s+d)}}{2}$, c'est-à-dire $\dfrac{\mathrm{e}^{ip}+\mathrm{e}^{-ip}}{2}+\dfrac{\mathrm{e}^{iq}+\mathrm{e}^{-iq}}{2}=\cos p+\cos q$. (1 pt) (1)

Méthode — Pour un calcul sur des modules, on remplace $|w|^2$ par $w\overline{w}$: les carrés de modules se développent alors comme des produits, sans aucune racine carrée.

Exercice 3 – Problème — L'équation $(z+1)^n = (z-1)^n$ *(5 pts)*

a) $(z+1)^3 = z^3+3z^2+3z+1$ et $(z-1)^3 = z^3-3z^2+3z-1$, donc $Q_3(z) = 6z^2+2$. Alors $Q_3(z) = 0 \iff z^2 = -\dfrac{1}{3} = \left(\dfrac{i\sqrt{3}}{3}\right)^2$: $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{\sqrt{3}}{3}i\,;-\dfrac{\sqrt{3}}{3}i\right\}$. (1 pt) (1)

b) Par la formule du binôme, $(z+1)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k$ et $(z-1)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k(-1)^{n-k}$, donc $Q_n(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1-(-1)^{n-k}\right)z^k$. Pour $k=n$, le coefficient est nul ; pour $k=n-1$, il vaut $\binom{n}{n-1}\times 2 = 2n \neq 0$. Q_n est donc de degré $n-1 \geqslant 1$, de coefficient dominant $2n$, et (E_n) a au plus $n-1$ solutions. Enfin $Q_n(1) = 2^n \neq 0$: 1 n'est pas solution. (1 pt : 0,5 pour le degré, 0,5 pour les conséquences) (1)

c) D'après b), une solution vérifie $z \neq 1$. Pour $z \neq 1$, on divise par $(z-1)^n \neq 0$: $(E_n) \iff \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$, c'est-à-dire $\dfrac{z+1}{z-1} \in \mathbb{U}_n$; de plus ce quotient n'est jamais égal à 1, car $z+1 \neq z-1$. Pour $\omega \in \mathbb{U}_n$ avec $\omega \neq 1$: $\dfrac{z+1}{z-1} = \omega \iff z+1 = \omega z - \omega \iff z(\omega-1) = \omega+1 \iff z = \dfrac{\omega+1}{\omega-1}$, nombre différent de 1. Les racines n-ièmes de l'unité différentes de 1 sont les ω_k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$: les solutions sont les z_k. (1 pt : 0,5 pour l'équivalence, 0,5 pour l'expression de z_k) (1)

d) On factorise par l'angle moitié : $\mathrm{e}^{i\alpha}+1 = \mathrm{e}^{i\alpha/2}\left(\mathrm{e}^{i\alpha/2}+\mathrm{e}^{-i\alpha/2}\right) = 2\cos\dfrac{\alpha}{2}\,\mathrm{e}^{i\alpha/2}$ et $\mathrm{e}^{i\alpha}-1 = \mathrm{e}^{i\alpha/2}\left(\mathrm{e}^{i\alpha/2}-\mathrm{e}^{-i\alpha/2}\right) = 2i\sin\dfrac{\alpha}{2}\,\mathrm{e}^{i\alpha/2}$ (Euler), avec $\sin\dfrac{\alpha}{2} > 0$ car $\dfrac{\alpha}{2} \in]0\,;\pi[$. Le quotient vaut $\dfrac{\cos(\alpha/2)}{i\sin(\alpha/2)} = -i\dfrac{\cos(\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}$. Avec $\alpha = \dfrac{2k\pi}{n} \in]0\,;2\pi[$: $z_k = -i\dfrac{\cos(k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)}$, imaginaire pur. Si $z_k = z_l$, alors $\omega_k = \dfrac{z_k+1}{z_k-1} = \omega_l$, donc $k=l$: les $n-1$ solutions sont distinctes. (1 pt : 0,5 pour la formule, 0,5 pour la conclusion) (1)

e) Avec la ligne $1, 6, 15, 20, 15, 6, 1$: $Q_6(z) = 2\left(6z^5+20z^3+6z\right) = 4z\left(3z^4+10z^2+3\right)$. Pour $3Z^2+10Z+3 = 0$: $\Delta = 100-36 = 64$, $Z = \dfrac{-10\pm 8}{6}$, soit $Z = -\dfrac{1}{3}$ ou $Z = -3$. D'où $z = 0$, $z = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}i$, $z = \pm i\sqrt{3}$. Avec d) : $z_1 = -i\dfrac{\sqrt{3}/2}{1/2} = -i\sqrt{3}$, $z_2 = -i\dfrac{1/2}{\sqrt{3}/2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}i$, $z_3 = 0$, $z_4 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}i$, $z_5 = i\sqrt{3}$: ce sont les mêmes cinq nombres. (1 pt) (1)

Piège — Le terme en z^n s'élimine dans $(z+1)^n-(z-1)^n$: l'équation est de degré $n-1$, et la racine n-ième 1 ne fournit aucune solution. On trouve donc $n-1$ solutions, et non n.

Exercice 4 – Problème — Le triangle de sommets z, z², z³ *(4 pts)*

a) $z^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i$ et $z^3 = -2i(-1+i) = 2i - 2i^2 = 2 + 2i$. Alors $z_N - z_M = -2i + 1 - i = 1 - 3i$ et $z_P - z_M = 3 + i$. Comme $i(1-3i) = i + 3$, on a $\dfrac{z_P - z_M}{z_N - z_M} = i$: $MP = MN$ et $(\overrightarrow{MN}\,;\overrightarrow{MP}) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Le triangle MNP est rectangle isocèle en M. (1 pt : 0,5 pour les puissances, 0,5 pour la nature) (1)

b) $z^2 - z = z(z-1)$, $z^3 - z = z(z-1)(z+1)$ et $z^3 - z^2 = z^2(z-1)$ sont non nuls, car $z \notin \{-1\,;0\,;1\}$: les trois affixes sont deux à deux distinctes. Puis $\dfrac{z^3 - z}{z^2 - z} = \dfrac{z(z-1)(z+1)}{z(z-1)} = z + 1$. (1 pt) (1)

c) Pour $z \notin \{-1\,;0\,;1\}$, MNP est rectangle en M si et seulement si $\dfrac{z_P - z_M}{z_N - z_M} = z + 1$ est imaginaire pur (il n'est pas nul). Avec $z = x + iy$: $z + 1$ imaginaire pur $\iff x + 1 = 0$. Les points d'abscisse -1 conviennent, sauf le point d'affixe -1 (exclu) ; les valeurs 0 et 1 ne sont pas sur cette droite. L'ensemble cherché est la droite d'équation $x = -1$ privée du point d'affixe -1. Le point du a), d'affixe $-1 + i$, en fait partie. (1 pt : 0,5 pour la condition, 0,5 pour l'ensemble et l'exclusion) (1)

d) MNP est équilatéral si et seulement si $MN = MP$ et $(\overrightarrow{MN}\,;\overrightarrow{MP}) = \pm\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$, c'est-à-dire $z + 1 = \mathrm{e}^{i\pi/3}$ ou $z + 1 = \mathrm{e}^{-i\pi/3}$. Donc $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = j$ ou $z = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = \overline{j} = j^2$, avec $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$ (valeurs différentes de -1, 0, 1). Pour $z = j$: $M(j)$, $N(j^2)$, $P(j^3) = P(1)$; pour $z = j^2$: $M(j^2)$, $N(j^4) = N(j)$, $P(j^6) = P(1)$. Dans les deux cas, les sommets sont les images des trois racines cubiques de l'unité. (1 pt : 0,5 pour les valeurs, 0,5 pour les points) (1)

Erreur fréquente — Le quotient $\dfrac{z_P - z_M}{z_N - z_M}$ ne renseigne que sur le sommet M ; et avant de parler de triangle, on écarte les valeurs de z pour lesquelles deux des points sont confondus.

Exercice 5 – Pour aller plus loin *(4 pts)*

a) $j = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, donc $1 + j = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = \mathrm{e}^{i\pi/3}$. Comme $j^3 = 1$ et $|j| = 1$, $j^2 = \dfrac{1}{j} = \overline{j}$, d'où $1 + j^2 = \overline{1 + j} = \mathrm{e}^{-i\pi/3}$. Par Moivre, puis Euler : $(1+j)^n + \left(1 + j^2\right)^n = \mathrm{e}^{in\pi/3} + \mathrm{e}^{-in\pi/3} = 2\cos\dfrac{n\pi}{3}$. (1 pt : 0,5 pour les formes exponentielles, 0,5 pour la somme) (1)

b) Par la formule du binôme et la formule de Moivre, $\left(1 + \mathrm{e}^{i\theta}\right)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{ik\theta}$, de partie réelle $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$. D'après le rappel, $\left(1 + \mathrm{e}^{i\theta}\right)^n = 2^n \cos^n\dfrac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{in\theta/2}$, dont la partie réelle est $2^n \cos^n\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{n\theta}{2}$, car $2^n\cos^n\dfrac{\theta}{2}$ est réel. Contrôle : à gauche, $1 + 4\times 0 + 6\times(-1) + 4\times 0 + 1\times 1 = -4$; à droite, $16\times\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 \times \cos\pi = 16\times\dfrac{1}{4}\times(-1) = -4$. (1 pt : 0,5 pour la démonstration, 0,5 pour le contrôle) (1)

c) $j^3 = \mathrm{e}^{2i\pi} = 1$. Si $k = 3m$, $j^k = (j^3)^m = 1$ et la somme vaut 3. Sinon, $q = j^k = \mathrm{e}^{2ik\pi/3} \neq 1$, car $\dfrac{2k\pi}{3}$ n'est pas un multiple de 2π ; et $q^3 = (j^3)^k = 1$. La somme géométrique donne $1 + q + q^2 = \dfrac{1 - q^3}{1 - q} = 0$. (1 pt) (1)

d) Par la formule du binôme, la somme vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(1 + j^k + j^{2k}\right)$, car $\left(1 + j^2\right)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} j^{2k}$. D'après c), seuls les k multiples de 3 comptent, avec le facteur 3 : elle vaut $3A_n$. D'après a), elle vaut aussi $2^n + 2\cos\dfrac{n\pi}{3}$. Donc $A_n = \dfrac{2^n + 2\cos(n\pi/3)}{3}$. Pour $n = 6$: $\dfrac{64 + 2\cos(2\pi)}{3} = \dfrac{66}{3} = 22$, et directement $\binom{6}{0} + \binom{6}{3} + \binom{6}{6} = 1 + 20 + 1 = 22$. (1 pt : 0,5 pour la double expression, 0,5 pour la formule et la vérification) (1)

Astuce — Une somme de cosinus pondérés par des coefficients binomiaux est la partie réelle d'une puissance $\left(1 + \mathrm{e}^{i\theta}\right)^n$; et les racines cubiques de l'unité « filtrent » les indices multiples de 3, car $1 + j^k + j^{2k}$ vaut 3 ou 0.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).