Devoir surveillé – Nombres complexes : forme algébrique, équations polynomiales, forme exponentielle et géométrie — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths expertes Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes *(4 pts)*

a) Donner la forme algébrique de $\dfrac{1+2i}{2-i} + (1-i)^4$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $9z^2 - 6z + 5 = 0$.

c) Donner la forme algébrique de $\left(-1 + i\sqrt{3}\right)^5$.

d) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|\overline{z} + 1 - 2i| = 3$.

Exercice 2 – Qui a raison ? *(4 pts)*

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse, puis justifier : une démonstration si elle est vraie, un contre-exemple si elle est fausse.

a) « Pour tout réel θ, $\left|\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}\right| = 2$. »

b) « L'équation $z^6 = -1$ n'a aucune solution réelle, et elle a exactement deux solutions imaginaires pures. »

c) « Pour tous complexes z et z' non nuls tels que $z + z' \neq 0$, $\arg(z + z') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$. »

d) « L'application $f : z \mapsto iz + 2$ est une rotation, dont le centre a pour affixe $1 + i$. »

Exercice 3 – Problème — Quatre racines et un carré *(4 pts)*

On considère le polynôme $P(z) = z^4 - 8z^3 + 24z^2 - 32z + 20$, où z est un nombre complexe.

a) Calculer $P(1+i)$. En déduire, sans calcul, une autre racine de P.

b) Déterminer les réels b et c tels que, pour tout complexe z, $P(z) = (z^2 - 2z + 2)(z^2 + bz + c)$.

c) Résoudre l'équation $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

d) On note A, B, C, D les points d'affixes $1+i$, $1-i$, $3-i$, $3+i$, et Ω le point d'affixe 2. Démontrer que B, C, D sont les images successives de A par la rotation r de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, puis que $ABCD$ est un carré dont on donnera l'aire.

Exercice 4 – Problème — Le cosinus de $\pi/8$ *(4 pts)*

On pose $\omega = \mathrm{e}^{i\pi/8}$ et l'on note x et y ses parties réelle et imaginaire : $\omega = x + iy$, avec $x = \cos\dfrac{\pi}{8}$ et $y = \sin\dfrac{\pi}{8}$.

a) Calculer ω^2 et ω^4 sous forme algébrique.

b) En développant $(x+iy)^2$ et en utilisant le module de ω, démontrer que $x^2 - y^2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $2xy = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $x^2 + y^2 = 1$.

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{8}$ et de $\sin\dfrac{\pi}{8}$.

d) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = i$. Donner les solutions sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique à l'aide de x et y.

Exercice 5 – Problème — Un carré et deux triangles équilatéraux *(4 pts)*

Dans le plan complexe, on considère le carré $ABCD$ de sommets $A(0)$, $B(2)$, $C(2+2i)$ et $D(2i)$. Le point E est tel que ABE soit un triangle équilatéral, avec E à l'intérieur du carré ; le point F est tel que BCF soit un triangle équilatéral, avec F à l'extérieur du carré.

a) Justifier que E est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$, puis en déduire que $z_E = 1 + i\sqrt{3}$.

b) On admet que F est l'image de C par la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$. Calculer z_F, puis vérifier que F est à l'extérieur du carré.

c) Démontrer que les points D, E et F sont alignés.

d) Développer $\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2$ et $\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2$, puis calculer les longueurs DE, DF et EF. Vérifier que $DE + EF = DF$ et interpréter.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).