Corrigé et barème – Nombres complexes : forme algébrique, équations polynomiales, forme exponentielle et géométrie — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths expertes Terminale

Exercice 1 – Automatismes *(4 pts)*

a) $\dfrac{1+2i}{2-i} = \dfrac{(1+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \dfrac{2+i+4i+2i^2}{5} = \dfrac{5i}{5} = i$. Puis $(1-i)^2 = 1-2i+i^2 = -2i$, donc $(1-i)^4 = (-2i)^2 = -4$. La somme vaut $-4+i$. (1 pt : 0,5 + 0,5) (1)

b) $\Delta = 36 - 180 = -144 = (12i)^2$, donc $z = \dfrac{6 \pm 12i}{18}$: $\mathcal{S} = \left\{ \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}i \,;\, \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3}i \right\}$. Contrôle : le produit des solutions vaut $\dfrac{1}{9} + \dfrac{4}{9} = \dfrac{5}{9} = \dfrac{c}{a}$. (1 pt) (1)

c) $-1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\,\mathrm{e}^{2i\pi/3}$, donc $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^5 = 2^5\,\mathrm{e}^{10i\pi/3} = 32\,\mathrm{e}^{-2i\pi/3}$, car $\dfrac{10\pi}{3} = 4\pi - \dfrac{2\pi}{3}$. Ainsi $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^5 = 32\left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -16 - 16i\sqrt{3}$. Contrôle : $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^3 = 2^3\,\mathrm{e}^{2i\pi} = 8$ et $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2 = 1 - 2i\sqrt{3} - 3 = -2 - 2i\sqrt{3}$, donc la puissance 5 vaut $8\left(-2-2i\sqrt{3}\right) = -16 - 16i\sqrt{3}$. (1 pt) (1)

d) $\overline{z} + 1 - 2i = \overline{z + 1 + 2i}$, et un nombre a le même module que son conjugué : la condition s'écrit $|z+1+2i| = 3$, soit $|z - (-1-2i)| = 3$. C'est le cercle de centre le point d'affixe $-1-2i$ et de rayon 3. (1 pt) (1)

Piège — Un module qui contient $\overline{z}$ se lit après conjugaison : $|\overline{z}+1-2i| = |z+1+2i|$, donc le centre a pour affixe $-1-2i$, et non $-1+2i$.

Exercice 2 – Qui a raison ? *(4 pts)*

a) Faux. D'après la formule d'Euler, $\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta} = 2\cos\theta$, de module $2|\cos\theta|$. Pour $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, ce module vaut 0, et non 2. (1 pt) (1)

b) Vrai. Pour x réel, $x^6 \geqslant 0 > -1$: aucune solution réelle. Pour $z = iy$ avec y réel, $z^6 = i^6 y^6 = -y^6$, donc $z^6 = -1 \iff y^6 = 1 \iff |y| = 1$ (y réel), soit $y = 1$ ou $y = -1$. Les solutions imaginaires pures sont exactement i et $-i$. (1 pt) (1)

c) Faux. Avec $z = z' = i$: $z + z' = 2i$, d'argument $\dfrac{\pi}{2}$, alors que $\arg(z) + \arg(z') = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = \pi$, et $\dfrac{\pi}{2} \neq \pi\ [2\pi]$. (C'est l'argument du produit $zz' = -1$ qui vaut π.) (1 pt) (1)

d) Vrai. $f(1+i) = i(1+i) + 2 = i - 1 + 2 = 1 + i$: le point $\Omega(1+i)$ est invariant. En soustrayant $1+i = i(1+i)+2$ à $f(z) = iz + 2$, on obtient $f(z) - (1+i) = i\,(z - (1+i))$, avec $i = \mathrm{e}^{i\pi/2}$: f est la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. (1 pt) (1)

Erreur fréquente — L'argument transforme un produit en somme : $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$. En revanche, l'argument d'une somme $z + z'$ ne se déduit pas des seuls arguments de z et de z'.

Exercice 3 – Problème — Quatre racines et un carré *(4 pts)*

a) $(1+i)^2 = 2i$, $(1+i)^3 = 2i(1+i) = -2+2i$ et $(1+i)^4 = (2i)^2 = -4$. Donc $P(1+i) = -4 - 8(-2+2i) + 24\times 2i - 32(1+i) + 20 = (-4+16-32+20) + (-16+48-32)i = 0$. Les coefficients de P sont réels, donc $\overline{1+i} = 1-i$ est aussi racine. (1 pt : 0,5 + 0,5) (1)

b) $(z-1-i)(z-1+i) = (z-1)^2 - i^2 = z^2 - 2z + 2$. Pour tout z, $(z^2-2z+2)(z^2+bz+c) = z^4 + (b-2)z^3 + (c-2b+2)z^2 + (2b-2c)z + 2c$. Identification : $b-2 = -8$, donc $b=-6$; $c-2b+2 = 24$, donc $c = 10$; vérifications : $2b-2c = -12-20 = -32$ et $2c = 20$. (1 pt) (1)

c) $P(z) = (z^2-2z+2)(z^2-6z+10)$. Pour $z^2-6z+10=0$: $\Delta = 36-40 = -4 = (2i)^2$, d'où $z = \dfrac{6 \pm 2i}{2} = 3 \pm i$. $\mathcal{S} = \{1+i\,;1-i\,;3-i\,;3+i\}$: quatre racines distinctes pour un polynôme de degré 4, il n'y en a pas d'autre. (1 pt) (1)

d) r a pour écriture $z' - 2 = i(z-2)$. Or $z_A - 2 = -1+i$, $i(-1+i) = -1-i = z_B - 2$, $i(-1-i) = 1-i = z_C - 2$ et $i(1-i) = 1+i = z_D - 2$: $r(A)=B$, $r(B)=C$, $r(C)=D$. Ainsi $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$; $z_C - 2 = -(z_A-2)$ et $z_D - 2 = -(z_B-2)$, donc Ω est le milieu de $[AC]$ et de $[BD]$; et $(\Omega A) \perp (\Omega B)$. Les diagonales de $ABCD$ ont le même milieu, la même longueur et sont perpendiculaires : $ABCD$ est un carré. Son côté vaut $AB = |-2i| = 2$, son aire 4. (1 pt : 0,5 pour les images, 0,5 pour le carré et l'aire) (1)

Méthode — Une racine non réelle α d'un polynôme à coefficients réels en donne deux : on factorise directement par $(z-\alpha)(z-\overline{\alpha}) = z^2 - 2\,\mathrm{Re}(\alpha)\,z + |\alpha|^2$, puis on identifie les coefficients.

Exercice 4 – Problème — Le cosinus de $\pi/8$ *(4 pts)*

a) $\omega^2 = \mathrm{e}^{2i\pi/8} = \mathrm{e}^{i\pi/4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ et $\omega^4 = \mathrm{e}^{4i\pi/8} = \mathrm{e}^{i\pi/2} = i$. (1 pt : 0,5 + 0,5) (1)

b) $(x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, et $\omega^2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$. Comme x^2-y^2 et $2xy$ sont réels, on identifie : $x^2 - y^2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $2xy = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Enfin $|\omega| = 1$, donc $x^2 + y^2 = |\omega|^2 = 1$. (1 pt) (1)

c) En ajoutant : $2x^2 = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, donc $x^2 = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$; en soustrayant : $y^2 = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$. Comme $\dfrac{\pi}{8} \in \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, $x>0$ et $y>0$: $\cos\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. Contrôle : $2xy = \dfrac{2\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (1 pt : 0,5 pour les carrés, 0,5 pour les signes) (1)

d) $i = \mathrm{e}^{i\pi/2}$ et $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ ($r>0$, car 0 n'est pas solution) : $z^4 = i \iff r^4 = 1$ et $4\theta = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, soit $r=1$ et $\theta = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \{0\,;1\,;2\,;3\}$. Les quatre solutions sont $\mathrm{e}^{i\pi/8} = \omega$, $\mathrm{e}^{5i\pi/8} = i\omega$, $\mathrm{e}^{-7i\pi/8} = -\omega$ et $\mathrm{e}^{-3i\pi/8} = -i\omega$, c'est-à-dire $x+iy$, $-y+ix$, $-x-iy$ et $y-ix$. (1 pt : 0,5 pour la forme exponentielle, 0,5 pour la forme algébrique) (1)

Astuce — Le module fournit une troisième équation, $x^2+y^2=1$: en l'ajoutant à x^2-y^2, puis en l'en soustrayant, on obtient directement x^2 et y^2 ; le signe de x et de y se lit sur le cercle trigonométrique.

Exercice 5 – Problème — Un carré et deux triangles équilatéraux *(4 pts)*

a) ABE est équilatéral, donc $AE = AB$ et l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AE})$ mesure $\dfrac{\pi}{3}$ ou $-\dfrac{\pi}{3}$. Comme E est à l'intérieur du carré, au-dessus de l'axe des abscisses qui porte $[AB]$, c'est $\dfrac{\pi}{3}$: E est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. Donc $z_E = \mathrm{e}^{i\pi/3} \times 2 = 2\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + i\sqrt{3}$; contrôle : $0 < 1 < 2$ et $0 < \sqrt{3} < 2$. (1 pt : 0,5 + 0,5) (1)

b) $z_F - z_B = \mathrm{e}^{-i\pi/3}(z_C - z_B)$, avec $z_C - z_B = 2i$: $z_F - 2 = 2i\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = i + \sqrt{3}$, donc $z_F = 2 + \sqrt{3} + i$. Sa partie réelle $2 + \sqrt{3}$ est supérieure à 2 : F est à droite de la droite (BC), à l'extérieur du carré. (1 pt) (1)

c) $z_E - z_D = 1 + i\left(\sqrt{3} - 2\right)$ et $z_F - z_D = 2 + \sqrt{3} - i$. Or $\left(2 + \sqrt{3}\right)\left(1 + i\left(\sqrt{3} - 2\right)\right) = 2 + \sqrt{3} + i\left(\sqrt{3} + 2\right)\left(\sqrt{3} - 2\right) = 2 + \sqrt{3} + i(3 - 4) = 2 + \sqrt{3} - i$. Donc $z_F - z_D = \left(2 + \sqrt{3}\right)(z_E - z_D)$: le quotient $\dfrac{z_F - z_D}{z_E - z_D}$ est le réel $2 + \sqrt{3}$, et les points D, E, F sont alignés. (1 pt) (1)

d) $\left(\sqrt{6} \mp \sqrt{2}\right)^2 = 6 \mp 2\sqrt{12} + 2 = 8 \mp 4\sqrt{3}$. $DE^2 = 1 + \left(\sqrt{3} - 2\right)^2 = 8 - 4\sqrt{3}$, donc $DE = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ (nombre positif). $DF^2 = \left(2 + \sqrt{3}\right)^2 + 1 = 8 + 4\sqrt{3}$, donc $DF = \sqrt{6} + \sqrt{2}$. $z_F - z_E = \left(1 + \sqrt{3}\right) + i\left(1 - \sqrt{3}\right)$, donc $EF^2 = 4 + 2\sqrt{3} + 4 - 2\sqrt{3} = 8$ et $EF = 2\sqrt{2}$. Alors $DE + EF = \sqrt{6} - \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = \sqrt{6} + \sqrt{2} = DF$: E appartient au segment $[DF]$, ce qui confirme l'alignement (et $DF = \left(2 + \sqrt{3}\right) DE$). (1 pt : 0,5 pour les longueurs, 0,5 pour la vérification) (1)

Méthode — Pour prouver un alignement, il suffit de trouver un réel k tel que $z_F - z_D = k(z_E - z_D)$: vérifier un produit est souvent plus rapide que diviser par une expression qui contient des radicaux.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).