Devoir surveillé – Nombres complexes : forme algébrique, équations polynomiales, forme exponentielle et géométrie — niveau ★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths expertes Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes *(5 pts)*

a) Donner la forme algébrique de $(2-i)(3+4i) - i^{2030}$.

b) Donner la forme algébrique de $\dfrac{7+i}{1-2i}$.

c) Le réel x appartient à $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;0\right[$ et vérifie $\cos x = \dfrac{3}{5}$. Calculer $\sin x$, puis $\sin(2x)$ et $\cos(2x)$.

d) Déterminer le module et un argument de $-2+2i$, puis sa forme exponentielle.

e) Les points A et B ont pour affixes $z_A = -2+3i$ et $z_B = 1-i$. Donner l'affixe du milieu I de $[AB]$ et calculer la longueur AB.

Exercice 2 – Un polynôme de degré 3 et un cercle *(5 pts)*

On considère le polynôme $P(z) = z^3 - z^2 - 5z + 125$, où z est un nombre complexe.

a) Vérifier que -5 est racine de P.

b) Déterminer les réels b et c tels que, pour tout complexe z, $P(z) = (z+5)(z^2 + bz + c)$.

c) Résoudre l'équation $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

d) On note A, B et C les points d'affixes -5, $3+4i$ et $3-4i$. Démontrer que A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O, dont on donnera le rayon.

e) Démontrer que le triangle ABC est isocèle. Est-il rectangle ?

Exercice 3 – Forme exponentielle et racines cubiques *(6 pts)*

On pose $a = 2 - 2i\sqrt{3}$.

a) Déterminer le module et un argument de a, puis écrire a sous forme exponentielle.

b) Calculer a^3 de deux façons : avec la forme exponentielle, puis en développant $(2-2i\sqrt{3})^3$ à l'aide de la formule du binôme.

c) En déduire que a est solution de l'équation $z^3 = -64$. Factoriser $z^3 + 64$ par $z+4$, puis résoudre l'équation $z^3 = -64$ dans $\mathbb{C}$.

d) On note A, B et C les points d'affixes -4, $2+2i\sqrt{3}$ et $2-2i\sqrt{3}$. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral et que O est son centre de gravité.

Exercice 4 – Une équation et deux ensembles de points *(4 pts)*

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z + i\overline{z} = 3 + 6i$.

b) On note Ω le point d'affixe $3i$. Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M d'affixe z tels que $|z - 3i| = 2$. Le point O appartient-il au disque délimité par $\mathcal{C}$?

c) Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M d'affixe z tels que $|z - 1| = |z + i|$, puis en donner une équation.

d) Les ensembles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ ont-ils des points communs ?

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).