Corrigé et barème – Nombres complexes : forme algébrique, équations polynomiales, forme exponentielle et géométrie — niveau ★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths expertes Terminale

Exercice 1 – Automatismes *(5 pts)*

a) $(2-i)(3+4i) = 6+8i-3i-4i^2 = 6+5i+4 = 10+5i$. Comme $2\,030 = 4\times 507+2$, $i^{2030} = i^2 = -1$. Donc $(2-i)(3+4i) - i^{2030} = 10+5i+1 = 11+5i$. (1 pt : 0,5 pour le produit, 0,5 pour la puissance de i) (1)

b) $\dfrac{7+i}{1-2i} = \dfrac{(7+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \dfrac{7+14i+i+2i^2}{1+4} = \dfrac{5+15i}{5} = 1+3i$. Contrôle : $(1-2i)(1+3i) = 1+3i-2i-6i^2 = 7+i$. (1 pt) (1)

c) $\sin^2 x = 1-\cos^2 x = 1-\dfrac{9}{25} = \dfrac{16}{25}$. Comme $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;0\right[$, $\sin x < 0$, donc $\sin x = -\dfrac{4}{5}$. Par duplication : $\sin(2x) = 2\sin x\cos x = 2\times\left(-\dfrac{4}{5}\right)\times\dfrac{3}{5} = -\dfrac{24}{25}$ et $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = \dfrac{18}{25} - 1 = -\dfrac{7}{25}$. Contrôle : $\dfrac{576}{625}+\dfrac{49}{625} = 1$. (1 pt : 0,5 pour $\sin x$, 0,5 pour les duplications) (1)

d) $|-2+2i| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. On factorise : $-2+2i = 2\sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)$. L'angle de cosinus $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et de sinus $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ est $\dfrac{3\pi}{4}$. Donc $-2+2i = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{3i\pi/4}$. (1 pt : 0,5 pour le module, 0,5 pour l'argument et la forme exponentielle) (1)

e) $z_I = \dfrac{z_A+z_B}{2} = \dfrac{-1+2i}{2} = -\dfrac{1}{2}+i$. $AB = |z_B - z_A| = |3-4i| = \sqrt{9+16} = 5$. (1 pt : 0,5 + 0,5) (1)

Méthode — Pour un quotient, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur ; pour une puissance de i, on ne garde que le reste de la division de l'exposant par 4.

Exercice 2 – Un polynôme de degré 3 et un cercle *(5 pts)*

a) $P(-5) = (-5)^3 - (-5)^2 - 5\times(-5) + 125 = -125 - 25 + 25 + 125 = 0$: -5 est racine de P. (1 pt) (1)

b) Pour tout z, $(z+5)(z^2+bz+c) = z^3 + (b+5)z^2 + (c+5b)z + 5c$. Par identification des coefficients : $b+5 = -1$, donc $b = -6$; $c + 5b = -5$, donc $c = 25$; vérification avec le terme constant : $5c = 125$. Ainsi $P(z) = (z+5)(z^2 - 6z + 25)$. (1 pt : 0,5 pour le développement, 0,5 pour b et c) (1)

c) $P(z) = 0 \iff z = -5$ ou $z^2 - 6z + 25 = 0$. Pour ce trinôme, $\Delta = 36 - 100 = -64 = (8i)^2$, d'où $z = \dfrac{6 \pm 8i}{2} = 3 \pm 4i$. $\mathcal{S} = \{-5\,;\, 3+4i\,;\, 3-4i\}$. Contrôle : $(3+4i)(3-4i) = 9 + 16 = 25$. (1 pt) (1)

d) $OA = |-5| = 5$, $OB = |3+4i| = \sqrt{9+16} = 5$ et $OC = |3-4i| = |\overline{3+4i}| = 5$. Les trois points sont à la distance 5 de O : ils appartiennent au cercle de centre O et de rayon 5. (1 pt) (1)

e) $AB = |z_B - z_A| = |8+4i| = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$, $AC = |8-4i| = \sqrt{80}$ et $BC = |-8i| = 8$. Comme $AB = AC$, le triangle ABC est isocèle en A. Avec les carrés $AB^2 = AC^2 = 80$ et $BC^2 = 64$: $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ ($64 \neq 160$) et $AB^2 \neq AC^2 + BC^2$ ($80 \neq 144$), de même pour AC^2. D'après le théorème de Pythagore, le triangle n'est rectangle en aucun sommet. (1 pt : 0,5 pour isocèle, 0,5 pour non rectangle) (1)

Astuce — Les racines non réelles d'un polynôme à coefficients réels sont conjuguées : leurs images sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses et ont le même module, ce qui donne un contrôle immédiat.

Exercice 3 – Forme exponentielle et racines cubiques *(6 pts)*

a) $|a| = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$. On factorise : $a = 4\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$. L'angle de cosinus $\dfrac{1}{2}$ et de sinus $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ est $-\dfrac{\pi}{3}$. Donc $a = 4\,\mathrm{e}^{-i\pi/3}$. (1,5 pt : 0,5 pour le module, 0,5 pour l'argument, 0,5 pour la forme exponentielle) (1,5)

b) Forme exponentielle : $a^3 = 4^3\,\mathrm{e}^{-3i\pi/3} = 64\,\mathrm{e}^{-i\pi} = -64$. Binôme, avec $b = -2i\sqrt{3}$: $b^2 = 4\times 3\times i^2 = -12$ et $b^3 = b^2 \times b = 24i\sqrt{3}$. Alors $(2+b)^3 = 2^3 + 3\times 2^2 \times b + 3\times 2\times b^2 + b^3 = 8 - 24i\sqrt{3} - 72 + 24i\sqrt{3} = -64$. Les deux calculs concordent. (1,5 pt : 0,5 pour la forme exponentielle, 1 pour le binôme) (1,5)

c) D'après b), $a^3 = -64$. On écrit $z^3 + 64 = z^3 - (-4)^3$, et la factorisation de $z^3 - \alpha^3$ avec $\alpha = -4$ donne $z^3 + 64 = (z+4)(z^2 - 4z + 16)$ (contrôle en développant : $z^3 - 4z^2 + 16z + 4z^2 - 16z + 64$). Pour $z^2 - 4z + 16 = 0$: $\Delta = 16 - 64 = -48 = \left(4i\sqrt{3}\right)^2$, d'où $z = \dfrac{4 \pm 4i\sqrt{3}}{2} = 2 \pm 2i\sqrt{3}$. $\mathcal{S} = \left\{-4\,;\, 2+2i\sqrt{3}\,;\, 2-2i\sqrt{3}\right\}$, qui contient bien a. (1,5 pt : 0,5 pour la factorisation, 1 pour la résolution) (1,5)

d) $AB = \left|6 + 2i\sqrt{3}\right| = \sqrt{36+12} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$, $AC = \left|6 - 2i\sqrt{3}\right| = 4\sqrt{3}$ et $BC = \left|-4i\sqrt{3}\right| = 4\sqrt{3}$: les trois côtés sont égaux, ABC est équilatéral. Son centre de gravité a pour affixe $\dfrac{-4 + (2+2i\sqrt{3}) + (2-2i\sqrt{3})}{3} = 0$: c'est O. (1,5 pt : 1 pour les longueurs, 0,5 pour le centre de gravité) (1,5)

Erreur fréquente — Dans $(2-2i\sqrt{3})^3$, le signe moins fait partie du second terme : avec $b = -2i\sqrt{3}$, on a $b^2 = -12$ et $b^3 = 24i\sqrt{3}$. Une erreur de signe empêche de retrouver -64.

Exercice 4 – Une équation et deux ensembles de points *(4 pts)*

a) On pose $z = x + iy$ (x, y réels), donc $\overline{z} = x - iy$: $2z + i\overline{z} = 2x + 2iy + ix - i^2 y = (2x + y) + i(x + 2y)$. Comme $2x + y$ et $x + 2y$ sont réels, on identifie : $2x + y = 3$ et $x + 2y = 6$. La première donne $y = 3 - 2x$, puis $x + 6 - 4x = 6$, soit $x = 0$ et $y = 3$. L'unique solution est $z = 3i$. Contrôle : $2 \times 3i + i \times (-3i) = 6i + 3$. (1 pt : 0,5 pour le système, 0,5 pour la solution) (1)

b) $|z - 3i| = \Omega M$: $\mathcal{C}$ est le cercle de centre Ω et de rayon 2. Comme $O\Omega = |3i| = 3 > 2$, le point O n'appartient pas au disque : il est à l'extérieur. (1 pt) (1)

c) Avec $E(1)$ et $F(-i)$, l'égalité s'écrit $|z - 1| = |z - (-i)|$, soit $EM = FM$: $\mathcal{D}$ est la médiatrice de $[EF]$. Avec $z = x + iy$ et les carrés des modules : $(x - 1)^2 + y^2 = x^2 + (y + 1)^2$, soit $-2x + 1 = 2y + 1$, d'où l'équation $y = -x$. Contrôle : le milieu de $[EF]$, d'affixe $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$, vérifie $y = -x$. (1 pt : 0,5 pour la médiatrice, 0,5 pour l'équation) (1)

d) Un point commun aurait des coordonnées réelles $(x\,; -x)$ avec $\Omega M^2 = 4$, soit $x^2 + (-x - 3)^2 = 4$, c'est-à-dire $2x^2 + 6x + 9 = 4$, soit $2x^2 + 6x + 5 = 0$. Son discriminant vaut $36 - 40 = -4 < 0$: cette équation n'a pas de solution réelle. $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ n'ont aucun point commun. (1 pt) (1)

Piège — Dans $|z + i|$, le point associé a pour affixe $-i$ et non i : on écrit d'abord $|z - (-i)|$. Et pour chercher une intersection, x et y sont réels : un discriminant négatif signifie qu'il n'y a aucun point commun.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).