Devoir surveillé – Matrices, systèmes, suites de matrices, graphes et chaînes de Markov — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths expertes Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes *(3 pts)*

a) On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et A^3. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}, puis calculer A^{50}.

b) Un graphe d'ordre 10 possède 17 arêtes, et chacun de ses sommets est de degré 3 ou 4. Combien de sommets sont de degré 4 ? (On admet qu'un tel graphe existe.)

c) Soit $a \in]0\,;1]$ et la matrice de transition $P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$. Déterminer a pour que $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ soit une distribution invariante de la chaîne.

Exercice 2 – Démontrer *(4 pts)*

a) Soit un graphe orienté de sommets numérotés de 1 à n et de matrice d'adjacence M. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $k \geqslant 1$, le coefficient $(i\,;j)$ de M^k est le nombre de chemins de longueur k allant de i à j.

b) Un *pont* d'un graphe connexe est une arête dont la suppression rend le graphe non connexe. Démontrer qu'un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré pair n'a aucun pont.

c) On note E la matrice colonne de taille 3 dont tous les coefficients valent 1. Soit P une matrice carrée d'ordre 3 à coefficients positifs ou nuls. Montrer que P est une matrice de transition si et seulement si $PE = E$, puis démontrer que P^n est une matrice de transition pour tout entier $n \geqslant 1$.

d) Soit N une matrice carrée d'ordre 2 telle que $N^2 = O$. Démontrer que $I + N$ est inversible, d'inverse $I - N$, puis que $(I+N)^n = I + nN$ pour tout entier naturel n. Application : vérifier que $N = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ convient et calculer $(I+N)^{10}$.

Exercice 3 – Problème — Chemins dans un triangle *(5 pts)*

On considère le graphe complet K_3, de sommets A, B, C (dans cet ordre), et sa matrice d'adjacence M. Pour tout entier naturel n, on note x_n le nombre de chemins de longueur n qui partent de A et reviennent en A, et y_n le nombre de chemins de longueur n qui vont de A à B. Par convention, $x_0 = 1$ et $y_0 = 0$ (ce sont les coefficients de $M^0 = I_3$).

a) Écrire M et calculer M^2. Interpréter les coefficients de M^2 situés ligne 1, colonne 1 et ligne 1, colonne 2.

b) On note z_n le nombre de chemins de longueur n de A à C. En utilisant $M^{n+1} = M^n \times M$, démontrer que $x_{n+1} = y_n + z_n$, $y_{n+1} = x_n + z_n$ et $z_{n+1} = x_n + y_n$, puis que $z_n = y_n$ pour tout n. En déduire une matrice T telle que $U_{n+1} = T U_n$, où $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

c) On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Vérifier que $TP = PD$ et calculer P^{-1}. On admet que $T^n = P D^n P^{-1}$ pour tout entier naturel n.

d) Démontrer que $x_n = \dfrac{2^n + 2(-1)^n}{3}$ et $y_n = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3}$ pour tout entier naturel n, puis calculer le nombre de chemins fermés de longueur 10 issus de A.

e) Vérifier que $x_n + 2y_n = 2^n$ et interpréter cette égalité. Montrer que $x_n - y_n = (-1)^n$, puis déterminer la limite de $\dfrac{x_n}{2^n}$ et l'interpréter.

Exercice 4 – Problème — Une borne de recharge *(4 pts)*

Une borne de recharge pour vélos électriques est, chaque heure, dans l'un des trois états : disponible (1), occupée (2) ou en panne (3). D'une heure à la suivante, une borne disponible le reste avec la probabilité 0,9 et devient occupée sinon ; une borne occupée le reste avec la probabilité 0,9 et tombe en panne sinon ; une borne en panne le reste avec la probabilité 0,6 ; sinon, elle est réparée et devient disponible ou occupée, avec la même probabilité. On admet que l'état de la borne définit une chaîne de Markov de distribution π_n à l'heure n. On rappelle que si une puissance de la matrice de transition a tous ses coefficients strictement positifs, alors (π_n) converge vers l'unique distribution invariante, quelle que soit π_0.

a) Écrire la matrice de transition P. La borne est disponible à l'heure 0 : calculer π_2 et en déduire la probabilité qu'elle soit en panne à l'heure 2.

b) On cherche une distribution invariante $\pi = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$. Montrer que π est invariante si et seulement si $(x\,;y\,;z)$ est solution du système $(S) : \begin{cases} -x + 2z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$, puis écrire (S) sous la forme $AX = B$.

c) Déterminer A^{-1} par la méthode du pivot, puis en déduire la distribution invariante π.

d) Justifier que la suite (π_n) converge. Le gestionnaire affirme : « à long terme, la borne est disponible plus d'une heure sur trois ». A-t-il raison ?

Exercice 5 – Pour aller plus loin *(4 pts)*

Un graphe non orienté, sans boucle mais peut-être avec des arêtes multiples, a trois sommets A, B, C, aucun sommet isolé et m arêtes. On note m_{ij} le nombre d'arêtes entre les sommets i et j, et $d(i)$ le degré de i. Un pion se déplace sur ce graphe : à chaque étape, il emprunte au hasard l'une des arêtes issues du sommet où il se trouve, toutes ces arêtes ayant la même probabilité d'être choisies. On admet que sa position définit une chaîne de Markov, de distribution π_n après n étapes, dans laquelle la probabilité de passer de i à j vaut $\dfrac{m_{ij}}{d(i)}$. On rappelle que si une puissance de la matrice de transition a tous ses coefficients strictement positifs, alors (π_n) converge vers l'unique distribution invariante, quelle que soit π_0.

a) Dans cette question, le graphe a deux arêtes entre A et B, une arête entre A et C et une arête entre B et C. Écrire sa matrice d'adjacence M (sommets dans l'ordre A, B, C), donner le degré de chaque sommet, puis la matrice de transition P.

b) Vérifier que $\pi = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ est une distribution invariante. Calculer P^2 et en déduire la limite de (π_n).

c) Cas général. On revient à un graphe quelconque vérifiant les hypothèses de l'énoncé. Démontrer que $\pi = \left(\dfrac{d(A)}{2m} \quad \dfrac{d(B)}{2m} \quad \dfrac{d(C)}{2m} \right)$ est une distribution invariante.

d) Le graphe a maintenant p arêtes entre A et B (p entier, $p \geqslant 1$), une arête entre A et C et une arête entre B et C. Montrer que (π_n) converge et qu'à long terme, la probabilité que le pion soit en C vaut $\dfrac{1}{p+2}$. Pour quelle valeur de p cette probabilité vaut-elle $\dfrac{1}{10}$?

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).