Corrigé et barème – Matrices, systèmes, suites de matrices, graphes et chaînes de Markov — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths expertes Terminale

Exercice 1 – Automatismes *(3 pts)*

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 4-3 & -6+3 \\ 2-1 & -3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 2-3 & -3+3 \\ 2-2 & -3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$. Donc $A \times (-A^2) = -A^3 = I$: A est inversible et $A^{-1} = -A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Comme $50 = 3 \times 16 + 2$: $A^{50} = (A^3)^{16} \times A^2 = (-I)^{16} A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, car $(-1)^{16} = 1$. (1 pt : 0,5 pour l'inverse, 0,5 pour A^{50}) (1)

b) Notons k le nombre de sommets de degré 4 ; les $10 - k$ autres sont de degré 3. Le lemme des poignées de main donne $4k + 3(10-k) = 2 \times 17$, soit $30 + k = 34$: $k = 4$. Le graphe a 4 sommets de degré 4 et 6 de degré 3. (1 pt) (1)

c) Le premier coefficient de πP doit valoir $\frac{1}{3} : \frac{1}{3}(1-a) + \frac{2}{3} \times 0{,}2 = \frac{1}{3}$, soit $1 - a + 0{,}4 = 1$, d'où $a = 0{,}4$. Le second coefficient est alors juste aussi, car les coefficients de πP ont pour somme 1 : $\frac{1}{3} \times 0{,}4 + \frac{2}{3} \times 0{,}8 = \frac{2}{3}$. (1 pt) (1)

Astuce — Une puissance égale à $\pm I$ fournit à la fois l'inverse et toutes les puissances : on réduit l'exposant grâce à la division euclidienne par 3.

Exercice 2 – Démontrer *(4 pts)*

a) Pour $k \geqslant 1$, notons $\mathcal{P}(k)$: « pour tous i et j, $(M^k)_{ij}$ est le nombre de chemins de longueur k de i à j ». **Initialisation** : m_{ij} est le nombre d'arcs de i vers j, c'est-à-dire de chemins de longueur 1 : $\mathcal{P}(1)$ est vraie. **Hérédité** : supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie. Un chemin de longueur $k+1$ de i à j se découpe d'une seule façon en un chemin de longueur k de i à un sommet r (l'avant-dernier), suivi d'un arc de r vers j. Pour r fixé, il y en a $(M^k)_{ir} \times m_{rj}$, d'après $\mathcal{P}(k)$. En sommant sur r, on obtient $\sum_{r=1}^{n} (M^k)_{ir}\, m_{rj}$, qui est le coefficient $(i\,;j)$ de $M^k \times M = M^{k+1}$: $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. **Conclusion** : $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \geqslant 1$. (1 pt : 0,5 pour la décomposition d'un chemin, 0,5 pour le lien avec le produit et la rédaction) (1)

b) Par l'absurde : supposons que l'arête u–v soit un pont, et notons $\mathcal{G}'$ le graphe obtenu en la supprimant. Soit H l'ensemble des sommets reliés à u par une chaîne de $\mathcal{G}'$. Le sommet v n'est pas dans H : sinon, une chaîne de $\mathcal{G}'$ de u à v remplacerait l'arête u–v dans toute chaîne, et $\mathcal{G}'$ serait connexe. Aucune arête de $\mathcal{G}'$ ne relie un sommet de H à un sommet hors de H ; les sommets de H et les arêtes qui les relient forment donc un graphe où chaque sommet garde son degré dans $\mathcal{G}'$: u y est de degré $d(u) - 1$, impair, et les autres sommets de H (différents de v) gardent leur degré pair. Ce graphe aurait un seul sommet de degré impair, ce qui contredit le lemme des poignées de main (le nombre de sommets de degré impair est pair). Il n'y a donc aucun pont. (1 pt : 0,5 pour le graphe formé par H, 0,5 pour la contradiction) (1)

c) Le coefficient i de PE est $p_{i1} + p_{i2} + p_{i3}$, la somme de la ligne i de P. Donc $PE = E$ équivaut à « chaque ligne a pour somme 1 » : avec des coefficients positifs ou nuls, c'est la définition d'une matrice de transition. Supposons-le, et montrons par récurrence que $P^n E = E$ pour $n \geqslant 1$: c'est vrai pour $n = 1$, et si $P^n E = E$, alors $P^{n+1}E = P^n(PE) = P^n E = E$. De plus, les coefficients de $P^{n+1} = P^n \times P$ sont des sommes de produits de nombres positifs ou nuls, donc positifs ou nuls (récurrence immédiate). Ainsi P^n est une matrice de transition. (1 pt : 0,5 pour l'équivalence, 0,5 pour la récurrence) (1)

d) $(I+N)(I-N) = I - N + N - N^2 = I$: $I + N$ est inversible, d'inverse $I - N$. Récurrence : $(I+N)^0 = I$; si $(I+N)^n = I + nN$, alors $(I+N)^{n+1} = (I+nN)(I+N) = I + N + nN + nN^2 = I + (n+1)N$. Application : $N^2 = \begin{pmatrix} 4-4 & -8+8 \\ 2-2 & -4+4 \end{pmatrix} = O$, donc $(I+N)^{10} = I + 10N = \begin{pmatrix} 21 & -40 \\ 10 & -19 \end{pmatrix}$. (1 pt : 0,5 pour l'inverse et la récurrence, 0,5 pour l'application) (1)

Erreur fréquente — Dans une récurrence sur des puissances de matrices, l'hérédité s'écrit avec $A^{n+1} = A^n \times A$ et l'associativité ; on ne développe « comme avec des réels » qu'après avoir vérifié que les matrices commutent.

Exercice 3 – Problème — Chemins dans un triangle *(5 pts)*

a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. $(M^2)_{11} = 2$: deux chemins fermés de longueur 2 issus de A, A–B–A et A–C–A (autant que le degré de A). $(M^2)_{12} = 1$: un seul chemin de longueur 2 de A à B, A–C–B. (1 pt : 0,5 pour M^2, 0,5 pour l'interprétation) (1)

b) La ligne 1 de M^n est $\begin{pmatrix} x_n & y_n & z_n \end{pmatrix}$ (théorème des chemins, et $M^0 = I$). La ligne 1 de $M^{n+1} = M^n \times M$ est cette ligne multipliée par M : $\begin{pmatrix} y_n + z_n & x_n + z_n & x_n + y_n \end{pmatrix}$, d'où les trois relations. Récurrence : $z_0 = y_0 = 0$, et si $z_n = y_n$, alors $z_{n+1} = x_n + y_n = x_n + z_n = y_{n+1}$. Donc $x_{n+1} = 2y_n$ et $y_{n+1} = x_n + y_n$, soit $U_{n+1} = TU_n$ avec $T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. (1 pt : 0,5 pour les relations, 0,5 pour $z_n = y_n$ et A) (1)

c) $TP = \begin{pmatrix} 0-2 & 0+2 \\ 2-1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $PD = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$: $TP = PD$. $\det(P) = 2 \times 1 - 1 \times (-1) = 3 \neq 0$, donc $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. (1 pt : 0,5 + 0,5) (1)

d) La suite est homogène : $U_n = T^n U_0 = PD^nP^{-1}U_0$, avec $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $P^{-1}U_0 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $D^nP^{-1}U_0 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} (-1)^n \\ 2^n \end{pmatrix}$, puis $U_n = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2(-1)^n + 2^n \\ -(-1)^n + 2^n \end{pmatrix}$: ce sont les formules annoncées (contrôle : $x_2 = 2$ et $y_2 = 1$, comme au a)). Pour $n = 10$: $x_{10} = \dfrac{1\,024 + 2}{3} = 342$ chemins fermés. (1 pt : 0,5 pour les formules, 0,5 pour x_{10}) (1)

e) $x_n + 2y_n = \dfrac{2^n + 2(-1)^n + 2 \times 2^n - 2(-1)^n}{3} = 2^n$: c'est le nombre total de chemins de longueur n issus de A ($x_n + y_n + z_n$), et chaque pas offre 2 choix. $x_n - y_n = \dfrac{2(-1)^n + (-1)^n}{3} = (-1)^n$: selon la parité de n, il y a un chemin de plus ou de moins vers A que vers B. Enfin $\dfrac{x_n}{2^n} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ tend vers $\dfrac{1}{3}$, car $-1 < -\dfrac{1}{2} < 1$: pour n grand, environ un tiers des chemins de longueur n issus de A y reviennent. (1 pt : 0,5 pour les deux égalités, 0,5 pour la limite) (1)

Méthode — Une symétrie du graphe (échanger B et C) réduit le nombre d'inconnues : trois suites deviennent deux, et une matrice 2×2 suffit à décrire tous les chemins issus de A.

Exercice 4 – Problème — Une borne de recharge *(4 pts)*

a) $P = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix}$. $\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\pi_1 = \pi_0 P = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 & 0 \end{pmatrix}$, puis $\pi_2 = \pi_1 P = \begin{pmatrix} 0{,}81 & 0{,}09 + 0{,}09 & 0{,}01 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}81 & 0{,}18 & 0{,}01 \end{pmatrix}$. La borne est en panne à l'heure 2 avec la probabilité 0,01. (1 pt : 0,5 pour P, 0,5 pour π_2) (1)

b) $\pi P = \pi$ s'écrit, colonne par colonne : $0{,}9\,x + 0{,}2\,z = x$, soit $-x + 2z = 0$; $0{,}1\,x + 0{,}9\,y + 0{,}2\,z = y$, soit $x - y + 2z = 0$; $0{,}1\,y + 0{,}6\,z = z$, soit $y - 4z = 0$. La somme des trois équations $-0{,}1\,x + 0{,}2\,z = 0$, $0{,}1\,x - 0{,}1\,y + 0{,}2\,z = 0$ et $0{,}1\,y - 0{,}4\,z = 0$ se réduit à $0 = 0$ (chaque ligne de P a pour somme 1) : la troisième est conséquence des deux premières. Une distribution vérifie de plus $x + y + z = 1$. D'où (S), qui s'écrit $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (1 pt : 0,5 pour les équations, 0,5 pour la troisième équation écartée et l'écriture $AX = B$) (1)

c) Sur $(A \mid I_3)$: $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ donne $(0\ \ -1\ \ 4 \mid 1\ \ 1\ \ 0)$; $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ donne $(0\ \ 1\ \ 3 \mid 1\ \ 0\ \ 1)$; puis $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ donne $(0\ \ 0\ \ 7 \mid 2\ \ 1\ \ 1)$: à gauche, la matrice est triangulaire de coefficients diagonaux -1, -1 et 7, tous non nuls, donc A est inversible. $L_3 \leftarrow \dfrac{1}{7} L_3$, puis $L_2 \leftarrow -(L_2 - 4L_3)$ et $L_1 \leftarrow -(L_1 - 2L_3)$ donnent $A^{-1} = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Contrôle : ligne 1 de A par colonne 1 de A^{-1}, $\dfrac{1}{7}(3 + 0 + 4) = 1$. Alors $X = A^{-1}B$ est la troisième colonne de A^{-1} : $\pi = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$, à coefficients positifs de somme 1 ; contrôle avec l'équation écartée : $y - 4z = \dfrac{4}{7} - \dfrac{4}{7} = 0$. (1 pt : 0,5 pour A^{-1}, 0,5 pour π) (1)

d) $P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}81 & 0{,}18 & 0{,}01 \\ 0{,}02 & 0{,}83 & 0{,}15 \\ 0{,}3 & 0{,}32 & 0{,}38 \end{pmatrix}$ n'a que des coefficients strictement positifs : d'après le résultat rappelé, (π_n) converge vers π, quelle que soit π_0. À long terme, la probabilité que la borne soit disponible est proche de $\dfrac{2}{7}$. Or $\dfrac{2}{7} = \dfrac{6}{21} < \dfrac{7}{21} = \dfrac{1}{3}$: le gestionnaire a tort. (La borne est occupée avec la probabilité $\dfrac{4}{7}$ et en panne avec la probabilité $\dfrac{1}{7}$.) (1 pt : 0,5 pour la convergence, 0,5 pour la conclusion) (1)

Piège — Les trois équations de $\pi P = \pi$ sont liées (leur somme se réduit à $0 = 0$) : sans la condition $x + y + z = 1$, le système aurait une infinité de solutions, dont la ligne nulle.

Exercice 5 – Pour aller plus loin *(4 pts)*

a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (le coefficient compte les arêtes). $d(A) = 3$, $d(B) = 3$, $d(C) = 2$ (sommes des lignes) et $m = 4$.

En divisant chaque ligne de M par le degré du sommet de départ : $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$; chaque ligne a pour somme 1.

(1 pt : 0,5 pour M et les degrés, 0,5 pour P) (1)

b) π est à coefficients positifs de somme 1. Premier coefficient de πP : $\frac{3}{8} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$; le deuxième de même ; le troisième : $\frac{3}{8} \times \frac{1}{3} \times 2 = \frac{1}{4}$. Donc $\pi P = \pi$. $P^2 = \begin{pmatrix} \frac{11}{18} & \frac{1}{6} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{6} & \frac{11}{18} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ n'a que des coefficients strictement positifs : (π_n) converge vers l'unique distribution invariante, donc vers π, quelle que soit π_0. (1 pt : 0,5 + 0,5) (1)

c) Les coefficients sont positifs et, d'après le lemme des poignées de main, $d(A) + d(B) + d(C) = 2m$: leur somme vaut 1. Le coefficient j de πP vaut $\sum_i \frac{d(i)}{2m} \times \frac{m_{ij}}{d(i)} = \frac{1}{2m} \sum_i m_{ij}$. Comme le graphe n'est pas orienté, $m_{ij} = m_{ji}$: $\sum_i m_{ij}$ est la somme de la ligne j de M, c'est-à-dire $d(j)$. Le coefficient j de πP vaut donc $\frac{d(j)}{2m}$: $\pi P = \pi$. (1 pt : 0,5 pour la somme, 0,5 pour $\pi P = \pi$) (1)

d) $d(A) = d(B) = p + 1$, $d(C) = 2$ et $m = p + 2$; $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{p}{p+1} & \frac{1}{p+1} \\ \frac{p}{p+1} & 0 & \frac{1}{p+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. Dans P^2 : $(P^2)_{11} = \frac{p^2}{(p+1)^2} + \frac{1}{2(p+1)}$, $(P^2)_{12} = \frac{1}{2(p+1)}$, $(P^2)_{13} = \frac{p}{(p+1)^2}$, $(P^2)_{31} = (P^2)_{32} = \frac{p}{2(p+1)}$, $(P^2)_{33} = \frac{1}{p+1}$, et la ligne 2 s'obtient comme la ligne 1 en échangeant A et B : tous sont strictement positifs, donc (π_n) converge vers l'unique distribution invariante, qui est celle du c). Sa coordonnée en C vaut $\frac{2}{2(p+2)} = \frac{1}{p+2}$, et $\frac{1}{p+2} = \frac{1}{10}$ pour $p = 8$. (1 pt : 0,5 pour la convergence, 0,5 pour $\frac{1}{p+2}$ et $p = 8$) (1)

Astuce — Le lemme des poignées de main transforme la liste des degrés en distribution de probabilité : il suffit de diviser chaque degré par $2m$. À long terme, le pion se trouve d'autant plus souvent sur un sommet que ce sommet a d'arêtes.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).