Devoir surveillé – Matrices, systèmes, suites de matrices, graphes et chaînes de Markov — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths expertes Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes *(4 pts)*

a) On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Donner les formats de A, de B, de AB et de BA, puis calculer AB.

b) Déterminer le réel m pour lequel le système $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ -6x + 4y = m \end{cases}$ admet une infinité de solutions, et décrire alors ces solutions. Que se passe-t-il pour les autres valeurs de m ?

c) Un graphe connexe a six sommets A, B, C, D, E, F, de degrés respectifs 2, 3, 4, 4, 3 et 2. Déterminer son nombre d'arêtes. Admet-il un cycle eulérien ? une chaîne eulérienne ?

d) Une chaîne de Markov à deux états a pour matrice de transition $P = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$. Déterminer sa distribution invariante.

Exercice 2 – Qui a raison ? *(4 pts)*

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse, puis justifier : une démonstration si elle est vraie, un contre-exemple si elle est fausse.

a) « Pour toutes matrices carrées A et B d'ordre 2, $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. »

b) « Si une matrice carrée A vérifie $A^2 = A$ et $A \neq I$, alors A n'est pas inversible. »

c) « Un graphe dont tous les sommets ont un degré au moins égal à 1 est connexe. »

d) « Si M est la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté et si tous les coefficients de M^2 situés hors de la diagonale sont non nuls, alors le graphe est connexe. »

Exercice 3 – Problème — Des passages à sens unique *(4 pts)*

Dans un jeu vidéo, quatre salles A, B, C, D (dans cet ordre) sont reliées par des passages à sens unique : A $\to$ B, A $\to$ C, B $\to$ C, C $\to$ D, D $\to$ A et D $\to$ B. On note M la matrice d'adjacence de ce graphe orienté.

a) Écrire M. Donner le degré sortant et le degré entrant de chaque salle, puis le nombre de passages.

b) Calculer M^2 et M^3.

c) Calculer la somme des coefficients diagonaux de M^3. En déduire le nombre de circuits de longueur 3 du graphe, puis les citer.

d) Justifier que le graphe est fortement connexe, puis déterminer la distance $d(B\,;A)$ en justifiant.

Exercice 4 – Problème — Deux refuges pour chats *(4 pts)*

Une association gère deux refuges pour chats, F et G. Chaque mois, dans le refuge F, 70 % des chats restent, 10 % sont transférés vers G et les autres sont adoptés ; dans le refuge G, 60 % des chats restent, 20 % sont transférés vers F et les autres sont adoptés. De plus, 20 nouveaux chats arrivent chaque mois en F et 10 en G. Au départ, F accueille 40 chats et G en accueille 80. On note u_n et v_n les nombres de chats (modélisés par des réels) dans F et dans G au bout de n mois, et $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

a) Justifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n + B$ avec $A = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$, puis calculer U_1.

b) Montrer que $C = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}$ est l'unique état stable, puis que la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - C$ vérifie $V_{n+1} = AV_n$.

c) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}8 \end{pmatrix}$. Vérifier que $AP = PD$, calculer P^{-1}, puis justifier que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout entier naturel n.

d) En déduire que $u_n = 100 - 40 \times 0{,}5^n - 20 \times 0{,}8^n$, exprimer v_n, puis déterminer les limites des suites (u_n) et (v_n) et les interpréter.

Exercice 5 – Problème — Trois activités *(4 pts)*

Chaque jour, Lina pratique une seule des trois activités de sa salle de sport : cardio (C), musculation (M) ou natation (N). Après une séance de cardio, elle refait du cardio le lendemain avec la probabilité 0,7, et fait de la musculation sinon. Après une séance de musculation, elle en refait une avec la probabilité 0,6, et nage sinon. Après la natation, elle nage encore avec la probabilité 0,6 ; sinon, elle choisit le cardio ou la musculation avec la même probabilité. Le jour 0, elle fait du cardio. On admet que l'activité du jour n définit une chaîne de Markov de distribution π_n, les états étant rangés dans l'ordre $(C\,;M\,;N)$. On rappelle que si une puissance de la matrice de transition a tous ses coefficients strictement positifs, alors (π_n) converge vers l'unique distribution invariante, quelle que soit π_0.

a) Représenter la situation par un graphe probabiliste, puis écrire la matrice de transition P.

b) Calculer π_1 et π_2. Quelle est la probabilité que Lina nage le jour 2 ?

c) Calculer P^2, puis en déduire que la suite (π_n) converge.

d) Déterminer la distribution invariante $\pi = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$, puis interpréter le résultat.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).