Corrigé et barème – Matrices, systèmes, suites de matrices, graphes et chaînes de Markov — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths expertes Terminale

Exercice 1 – Automatismes *(4 pts)*

a) A est de format 2×3 et B de format 3×2. $(2\times 3)(3\times 2)$: AB existe et est de format 2×2 ; $(3\times 2)(2\times 3)$: BA existe et est de format 3×3. $AB=\begin{pmatrix}6-1+0 & 3+0+0\\ 2+2+2 & 1+0-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 6 & -5\end{pmatrix}$. (1 pt : 0,5 pour les formats, 0,5 pour AB) (1)

b) Le déterminant de la matrice du système vaut $3\times 4-(-2)\times(-6)=12-12=0$: le système n'a pas une unique solution. En multipliant la première équation par -2 : $-6x+4y=-8$. Si $m=-8$, la seconde équation est équivalente à la première : en posant $y=t$, les solutions sont les couples $\left(\dfrac{4+2t}{3}\,;t\right)$, $t\in\mathbb{R}$ (une infinité). Si $m\neq -8$, le système imposerait $-8=m$: il n'a aucune solution. (1 pt : 0,5 pour $m=-8$ et les solutions, 0,5 pour les autres cas) (1)

c) La somme des degrés vaut $18=2\times 9$: le graphe a 9 arêtes (lemme des poignées de main). Il est connexe et a exactement deux sommets de degré impair, B et E : d'après le théorème d'Euler, il n'admet pas de cycle eulérien, mais il admet une chaîne eulérienne, d'extrémités B et E. (1 pt : 0,5 + 0,5) (1)

d) On cherche $\pi=\begin{pmatrix}x & 1-x\end{pmatrix}$ telle que $\pi P=\pi$. Le premier coefficient donne $0{,}6\,x+0{,}1(1-x)=x$, soit $0{,}1=0{,}5\,x$, d'où $x=0{,}2$. Donc $\pi=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}8\end{pmatrix}$; contrôle sur le second coefficient : $0{,}2\times 0{,}4+0{,}8\times 0{,}9=0{,}08+0{,}72=0{,}8$. (1 pt) (1)

Piège — Un déterminant nul ne signifie pas « aucune solution » : il exclut seulement la solution unique. On revient alors aux équations pour trancher entre aucune solution et une infinité.

Exercice 2 – Qui a raison ? *(4 pts)*

a) Faux. Avec $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$: $A+B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ et $(A+B)^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Or $A^2=A$, $AB=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=B$ et $B^2=O$, donc $A^2+2AB+B^2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, qui est différente. En fait $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$, et ici $BA=O\neq AB$. (1 pt) (1)

b) Vrai. Supposons A inversible. En multipliant $A^2=A$ à gauche par A^{-1} : $A^{-1}A^2=A^{-1}A$, soit $(A^{-1}A)A=I$, donc $A=I$, ce qui contredit l'hypothèse. Donc A n'est pas inversible. (1 pt) (1)

c) Faux. Le graphe de sommets A, B, C, D et d'arêtes A–B et C–D a tous ses sommets de degré 1, mais aucune chaîne ne relie A à C : il n'est pas connexe. (1 pt) (1)

d) Vrai. Soient i et j deux sommets distincts. Le coefficient $(i\,;j)$ de M^2 est le nombre de chaînes de longueur 2 de i à j ; il est non nul, donc au moins une chaîne relie i à j. Deux sommets quelconques sont ainsi reliés : le graphe est connexe. (1 pt) (1)

Erreur fréquente — Avec des matrices, $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$: on ne regroupe $AB+BA$ en $2AB$ que si A et B commutent.

Exercice 3 – Problème — Des passages à sens unique *(4 pts)*

a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les sommes des lignes donnent les degrés sortants : $d^+(A) = 2$, $d^+(B) = 1$, $d^+(C) = 1$, $d^+(D) = 2$. Les sommes des colonnes donnent les degrés entrants : $d^-(A) = 1$, $d^-(B) = 2$, $d^-(C) = 2$, $d^-(D) = 1$. La somme de tous les coefficients vaut 6 : il y a 6 passages. (1 pt : 0,5 pour M, 0,5 pour les degrés) (1)

b) $M^2 = M \times M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, puis $M^3 = M^2 \times M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Par exemple, la ligne 4 de M^2 est la somme des lignes 1 et 2 de M, car les voisins sortants de D sont A et B. (1 pt : 0,5 par matrice) (1)

c) La diagonale de M^3 est $(1, 1, 2, 2)$, de somme 6. Le coefficient $(i\,;i)$ de M^3 compte les chemins fermés de longueur 3 issus de i, et chaque circuit de longueur 3 est compté depuis ses 3 sommets : il y a $6 \div 3 = 2$ circuits, A $\to$ C $\to$ D $\to$ A et B $\to$ C $\to$ D $\to$ B. (1 pt : 0,5 pour le nombre, 0,5 pour les circuits) (1)

d) $S = M + M^2 + M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ (graphe d'ordre 4, on s'arrête à M^3). Tous ses coefficients hors de la diagonale sont non nuls : de toute salle, on peut atteindre toute autre salle, le graphe est fortement connexe. Le coefficient $(2\,;1)$ vaut 0 dans M et dans M^2, et 1 dans M^3 : $d(B\,;A) = 3$, par le chemin B $\to$ C $\to$ D $\to$ A. (1 pt : 0,5 + 0,5) (1)

Méthode — La diagonale de M^3 compte les chemins fermés de longueur 3 ; chaque circuit de longueur 3 y est compté une fois depuis chacun de ses trois sommets, d'où la division par 3.

Exercice 4 – Problème — Deux refuges pour chats *(4 pts)*

a) Le mois suivant, F contient les chats restés en F, ceux venus de G et les nouveaux : $u_{n+1} = 0{,}7\,u_n + 0{,}2\,v_n + 20$; de même $v_{n+1} = 0{,}1\,u_n + 0{,}6\,v_n + 10$. C'est $U_{n+1} = AU_n + B$. Puis $U_1 = \begin{pmatrix} 28+16+20 \\ 4+48+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 \\ 62 \end{pmatrix}$. (1 pt : 0,5 + 0,5) (1)

b) $I - A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ a pour déterminant $0{,}3 \times 0{,}4 - (-0{,}2) \times (-0{,}1) = 0{,}1 \neq 0$: elle est inversible, et l'équation $(I-A)X = B$ a une unique solution. Or $AC + B = \begin{pmatrix} 70+10+20 \\ 10+30+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix} = C$: C est l'unique état stable. Enfin $V_{n+1} = AU_n + B - (AC + B) = A(U_n - C) = AV_n$. (1 pt : 0,5 + 0,5) (1)

c) $AP = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 1{,}6 \\ -0{,}5 & 0{,}8 \end{pmatrix}$ et $PD = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 1{,}6 \\ -0{,}5 & 0{,}8 \end{pmatrix}$: $AP = PD$. $\det(P) = 1 + 2 = 3$, donc $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, et $A = PDP^{-1}$ (multiplication à droite par P^{-1}). Récurrence : $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I = A^0$; si $A^n = PD^nP^{-1}$, alors $A^{n+1} = A^nA = PD^n(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$. (1 pt : 0,5 pour $AP = PD$ et P^{-1}, 0,5 pour la récurrence) (1)

d) $V_n = A^nV_0$ (suite homogène), avec $V_0 = U_0 - C = \begin{pmatrix} -60 \\ 30 \end{pmatrix}$. $P^{-1}V_0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -60-60 \\ -60+30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 \\ -10 \end{pmatrix}$, puis $V_n = PD^n\begin{pmatrix} -40 \\ -10 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} -40 \times 0{,}5^n \\ -10 \times 0{,}8^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 \times 0{,}5^n - 20 \times 0{,}8^n \\ 40 \times 0{,}5^n - 10 \times 0{,}8^n \end{pmatrix}$. Donc $u_n = 100 - 40 \times 0{,}5^n - 20 \times 0{,}8^n$ et $v_n = 50 + 40 \times 0{,}5^n - 10 \times 0{,}8^n$ (contrôle : $u_1 = 64$, $v_1 = 62$). Comme 0,5 et 0,8 sont dans $]-1\,;1[$, $0{,}5^n$ et $0{,}8^n$ tendent vers 0 : (u_n) tend vers 100 et (v_n) vers 50. À long terme, F accueille environ 100 chats et G environ 50 ; on vérifie que les adoptions, 20 % de 150, soit 30 par mois, compensent les 30 arrivées. (1 pt : 0,5 pour u_n et v_n, 0,5 pour les limites) (1)

Erreur fréquente — Si A^n tend vers la matrice nulle, c'est l'écart $U_n - C$ qui disparaît : la suite tend vers l'état stable C, pas vers la matrice nulle.

Exercice 5 – Problème — Trois activités *(4 pts)*

a) Graphe : sommets C, M, N ; arcs C $\to$ C (0,7), C $\to$ M (0,3), M $\to$ M (0,6), M $\to$ N (0,4), N $\to$ N (0,6), N $\to$ C (0,2) et N $\to$ M (0,2). $P = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix}$; chaque ligne a pour somme 1. (1 pt : 0,5 + 0,5) (1)

b) $\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\pi_1 = \pi_0 P = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0 \end{pmatrix}$. $\pi_2 = \pi_1 P = \begin{pmatrix} 0{,}7\times 0{,}7 & 0{,}7\times 0{,}3 + 0{,}3\times 0{,}6 & 0{,}3\times 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}49 & 0{,}39 & 0{,}12 \end{pmatrix}$. Lina nage le jour 2 avec la probabilité 0,12. (1 pt : 0,5 + 0,5) (1)

c) $P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}49 & 0{,}39 & 0{,}12 \\ 0{,}08 & 0{,}44 & 0{,}48 \\ 0{,}26 & 0{,}3 & 0{,}44 \end{pmatrix}$ (sa première ligne redonne π_2). Tous les coefficients de P^2 sont strictement positifs : d'après le résultat rappelé, (π_n) converge vers l'unique distribution invariante de la chaîne, quelle que soit π_0. (1 pt : 0,5 + 0,5) (1)

d) $\pi P = \pi$ donne, sur la première colonne, $0{,}7\,x + 0{,}2\,z = x$, soit $z = 1{,}5\,x$, et sur la troisième, $0{,}4\,y + 0{,}6\,z = z$, soit $y = z$. Avec $x + y + z = 1$: $x + 1{,}5\,x + 1{,}5\,x = 4x = 1$, d'où $x = 0{,}25$ et $y = z = 0{,}375$. Contrôle sur la deuxième colonne : $0{,}3\times 0{,}25 + 0{,}6\times 0{,}375 + 0{,}2\times 0{,}375 = 0{,}075 + 0{,}225 + 0{,}075 = 0{,}375$. Donc $\pi = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}375 & 0{,}375 \end{pmatrix}$: à long terme, Lina fait du cardio un jour sur quatre environ, et de la musculation ou de la natation avec la probabilité 0,375 chacune. (1 pt : 0,5 pour le système, 0,5 pour π et l'interprétation) (1)

Astuce — Pour justifier la convergence à trois états, il suffit d'exhiber une puissance de P sans aucun coefficient nul : souvent, P^2 convient même quand P contient des zéros.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).