Devoir surveillé – Matrices, systèmes, suites de matrices, graphes et chaînes de Markov — niveau ★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths expertes Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes *(5 pts)*

a) On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer AB et BA. Les matrices A et B commutent-elles ?

b) Justifier que $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer C^{-1}.

c) Un graphe a cinq sommets, de degrés 1, 2, 2, 3 et 4. Combien a-t-il d'arêtes ?

d) Dans un tournoi, chaque équipe a rencontré une fois et une seule chacune des autres équipes, et 28 matchs ont été joués. Modéliser le tournoi par un graphe, puis déterminer le nombre d'équipes.

e) Un graphe orienté a pour sommets 1, 2, 3 (dans cet ordre) et pour matrice d'adjacence $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donner la liste de ses arcs, puis le degré sortant et le degré entrant du sommet 3.

Exercice 2 – Un système et une suite de matrices *(4 pts)*

On pose $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $\det(A)$, justifier que A est inversible et calculer A^{-1}.

b) Résoudre le système $\begin{cases} 5x + 3y = 1 \\ 7x + 4y = 2 \end{cases}$ à l'aide de A^{-1}.

c) Une suite de matrices colonnes (U_n) vérifie $U_{n+1} = AU_n$ pour tout entier naturel n, et $U_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Justifier que $U_1 = A^{-1}U_2$, puis calculer U_1.

d) En déduire U_0, puis vérifier le résultat en calculant AU_0.

Exercice 3 – Un graphe et sa matrice *(5 pts)*

Un graphe $\mathcal{G}$ a pour sommets A, B, C, D, E (dans cet ordre) et pour arêtes A–B, A–C, B–C, B–D, C–D, C–E et D–E.

a) Donner l'ordre de $\mathcal{G}$ et le degré de chaque sommet, puis vérifier le lemme des poignées de main.

b) Le graphe $\mathcal{G}$ est-il complet ? Est-il connexe ?

c) Écrire la matrice d'adjacence M de $\mathcal{G}$.

d) Sans calculer toute la matrice M^2, calculer son coefficient de la ligne 1 et de la colonne 4, l'interpréter, puis citer les chaînes correspondantes.

e) Le graphe $\mathcal{G}$ admet-il un cycle eulérien ? une chaîne eulérienne ? Si oui, en donner une.

Exercice 4 – Problème — Livres ou bandes dessinées ? *(6 pts)*

Chaque semaine, Noé emprunte à la médiathèque soit un livre (L), soit une bande dessinée (B). S'il a emprunté un livre une semaine, il emprunte encore un livre la semaine suivante avec la probabilité 0,8 ; s'il a emprunté une bande dessinée, il emprunte un livre la semaine suivante avec la probabilité 0,3. La semaine 0, il emprunte un livre. On admet que l'on obtient une chaîne de Markov ; on note $\pi_n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \end{pmatrix}$ la distribution de la semaine n, les états étant rangés dans l'ordre $(L\,;B)$.

a) Représenter la situation par un graphe probabiliste, puis écrire la matrice de transition P.

b) Donner π_0, puis calculer π_1 et π_2. Interpréter π_2.

c) Montrer que, pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = 0{,}5\,x_n + 0{,}3$, puis déterminer la distribution invariante de la chaîne.

d) Montrer que, pour tout entier naturel n, $x_n = 0{,}6 + 0{,}4 \times 0{,}5^n$, puis déterminer la limite de (x_n) et l'interpréter.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).