Corrigé et barème – Matrices, systèmes, suites de matrices, graphes et chaînes de Markov — niveau ★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths expertes Terminale

Exercice 1 – Automatismes *(5 pts)*

a) $AB = \begin{pmatrix} 2\times 0+(-1)\times(-1) & 2\times 2+(-1)\times 1 \\ 1\times 0+3\times(-1) & 1\times 2+3\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 0\times 2+2\times 1 & 0\times(-1)+2\times 3 \\ (-1)\times 2+1\times 1 & (-1)\times(-1)+1\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Comme $AB \neq BA$, les matrices A et B ne commutent pas. (1 pt : 0,5 par produit) (1)

b) $\det(C) = 3\times 2 - 1\times 4 = 2 \neq 0$, donc C est inversible et $C^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 \\ -2 & 1{,}5 \end{pmatrix}$. Contrôle, ligne 1 de C par colonne 1 de C^{-1} : $3\times 1 + 1\times(-2) = 1$. (1 pt : 0,5 pour le déterminant, 0,5 pour l'inverse) (1)

c) D'après le lemme des poignées de main, la somme des degrés vaut le double du nombre m d'arêtes : $1+2+2+3+4 = 12 = 2m$, donc le graphe a $m = 6$ arêtes. (1 pt) (1)

d) Les sommets sont les équipes et chaque match est une arête : deux équipes quelconques sont reliées, le graphe est le graphe complet K_n, où n est le nombre d'équipes. Il a $\dfrac{n(n-1)}{2}$ arêtes, donc $n(n-1) = 56 = 8\times 7$. Le produit $n(n-1)$ augmente avec l'entier $n \geqslant 1$ ($7\times 6 = 42$, $9\times 8 = 72$) : $n = 8$. Il y a 8 équipes. (1 pt : 0,5 pour la modélisation, 0,5 pour n) (1)

e) Le coefficient de la ligne i et de la colonne j vaut 1 quand l'arc $i \to j$ existe : les arcs sont $1\to 2$, $1\to 3$, $2\to 3$ et $3\to 1$ (4 arcs, la somme des coefficients). Le degré sortant de 3 est la somme de la ligne 3 : $d^+(3) = 1$; son degré entrant est la somme de la colonne 3 : $d^-(3) = 2$. (1 pt : 0,5 pour les arcs, 0,5 pour les degrés) (1)

Méthode — Avant un produit, on écrit les formats ; pour l'inverse d'une matrice 2×2, on calcule d'abord le déterminant, puis on contrôle un coefficient du produit CC^{-1}.

Exercice 2 – Un système et une suite de matrices *(4 pts)*

a) $\det(A) = 5\times 4 - 3\times 7 = 20 - 21 = -1 \neq 0$, donc A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$. Contrôle : $5\times(-4) + 3\times 7 = 1$. (1 pt : 0,5 pour le déterminant, 0,5 pour l'inverse) (1)

b) Le système s'écrit $AX = B$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Comme A est inversible, $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -4\times 1 + 3\times 2 \\ 7\times 1 - 5\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Le système admet pour unique solution le couple $(2\,;-3)$; contrôle : $14 - 12 = 2$. (1 pt) (1)

c) $U_2 = AU_1$; en multipliant à gauche par A^{-1} : $A^{-1}U_2 = (A^{-1}A)U_1 = U_1$. Donc $U_1 = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8+9 \\ 14-15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. (1 pt) (1)

d) De même, $U_0 = A^{-1}U_1 = \begin{pmatrix} -4-3 \\ 7+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 12 \end{pmatrix}$. Vérification : $AU_0 = \begin{pmatrix} -35+36 \\ -49+48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = U_1$. (1 pt) (1)

Erreur fréquente — De $AX = B$, on tire $X = A^{-1}B$ en multipliant à gauche par A^{-1} : le produit BA^{-1} n'existe même pas, et l'on ne divise jamais par une matrice.

Exercice 3 – Un graphe et sa matrice *(5 pts)*

a) $\mathcal{G}$ a 5 sommets : il est d'ordre 5. $d(A)=2$, $d(B)=3$, $d(C)=4$, $d(D)=3$ et $d(E)=2$. La somme des degrés vaut $2+3+4+3+2=14=2\times 7$: c'est bien le double du nombre d'arêtes. (1 pt) (1)

b) Il n'est pas complet : A et D ne sont pas adjacents. Il est connexe : C est adjacent à A, B, D et E, donc deux sommets quelconques sont reliés par une chaîne qui passe par C. (1 pt : 0,5 + 0,5) (1)

c) $M=\begin{pmatrix}0&1&1&0&0\\1&0&1&1&0\\1&1&0&1&1\\0&1&1&0&1\\0&0&1&1&0\end{pmatrix}$. Elle est symétrique (graphe non orienté) et de diagonale nulle (pas de boucle). (1 pt) (1)

d) C'est la ligne 1 de M multipliée par la colonne 4 de M : $0\times 0+1\times 1+1\times 1+0\times 0+0\times 1=2$. D'après le cours, il y a 2 chaînes de longueur 2 de A à D : A–B–D et A–C–D (B et C sont les voisins communs de A et de D). (1 pt : 0,5 pour le calcul, 0,5 pour l'interprétation) (1)

e) $\mathcal{G}$ est connexe et a exactement deux sommets de degré impair, B et D. D'après le théorème d'Euler, il n'a pas de cycle eulérien, mais il admet une chaîne eulérienne d'extrémités B et D, par exemple B–A–C–B–D–C–E–D, qui emprunte une fois chacune des 7 arêtes : B–A, A–C, C–B, B–D, D–C, C–E, E–D. (1 pt : 0,5 pour la justification, 0,5 pour la chaîne) (1)

Astuce — Pour un seul coefficient de M^2, on multiplie la ligne i de M par la colonne j : chaque produit égal à 1 correspond à un voisin commun de i et de j, donc à une chaîne de longueur 2.

Exercice 4 – Problème — Livres ou bandes dessinées ? *(6 pts)*

a) Graphe : deux sommets L et B ; arcs $L\to L$ de poids 0,8, $L\to B$ de poids 0,2, $B\to L$ de poids 0,3 et $B\to B$ de poids 0,7 (les poids issus d'un sommet ont pour somme 1). Dans l'ordre $(L\,;B)$: $P=\begin{pmatrix}0{,}8&0{,}2\\0{,}3&0{,}7\end{pmatrix}$. (1,5 pt : 0,5 pour le graphe, 1 pour la matrice) (1,5)

b) La semaine 0, Noé emprunte un livre : $\pi_0=\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}$. $\pi_1=\pi_0P=\begin{pmatrix}0{,}8&0{,}2\end{pmatrix}$ (première ligne de P). $\pi_2=\pi_1P=\begin{pmatrix}0{,}8\times 0{,}8+0{,}2\times 0{,}3&0{,}8\times 0{,}2+0{,}2\times 0{,}7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}7&0{,}3\end{pmatrix}$. La semaine 2, Noé emprunte un livre avec la probabilité 0,7 et une bande dessinée avec la probabilité 0,3. (1,5 pt : 0,5 pour π_0 et π_1, 1 pour π_2) (1,5)

c) Le premier coefficient de $\pi_{n+1}=\pi_nP$ vaut $x_{n+1}=0{,}8\,x_n+0{,}3\,y_n$, avec $y_n=1-x_n$: $x_{n+1}=0{,}8\,x_n+0{,}3-0{,}3\,x_n=0{,}5\,x_n+0{,}3$. Une distribution $\begin{pmatrix}x&1-x\end{pmatrix}$ est invariante si et seulement si $x=0{,}5\,x+0{,}3$, soit $0{,}5\,x=0{,}3$ et $x=0{,}6$. La distribution invariante est $\pi=\begin{pmatrix}0{,}6&0{,}4\end{pmatrix}$; contrôle : $0{,}6\times 0{,}8+0{,}4\times 0{,}3=0{,}48+0{,}12=0{,}6$. (1,5 pt : 0,5 pour la relation, 1 pour π) (1,5)

d) On pose $v_n=x_n-0{,}6$. Alors $v_{n+1}=0{,}5\,x_n+0{,}3-0{,}6=0{,}5(x_n-0{,}6)=0{,}5\,v_n$: la suite (v_n) est géométrique de raison 0,5 et de premier terme $v_0=1-0{,}6=0{,}4$. Donc $v_n=0{,}4\times 0{,}5^n$ et $x_n=0{,}6+0{,}4\times 0{,}5^n$ (contrôle : $x_2=0{,}6+0{,}1=0{,}7$). Comme $-1<0{,}5<1$, $0{,}5^n$ tend vers 0, donc (x_n) converge vers 0,6 : à long terme, la probabilité que Noé emprunte un livre une semaine donnée est proche de 0,6. (1,5 pt : 1 pour la forme explicite, 0,5 pour la limite) (1,5)

Piège — Ce sont les lignes de P qui ont pour somme 1 (une ligne = un état de départ). La distribution est une matrice ligne placée à gauche : $\pi_{n+1}=\pi_nP$, et non $P\pi_n$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).