Devoir surveillé – Divisibilité, PGCD, congruences, Bézout, Gauss et nombres premiers — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths expertes Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes *(3 pts)*

a) Déterminer le reste de la division euclidienne de $2\,026^{2\,026}$ par 7.

b) Combien l'entier 12^{10} a-t-il de diviseurs positifs ? Combien d'entre eux sont des carrés parfaits ?

c) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $26x \equiv 39 \ [65]$.

Exercice 2 – Démontrer *(4 pts)*

a) Démontrer le théorème de Gauss : si a divise bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c. On pourra utiliser le théorème de Bézout.

b) Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, les entiers $n! + 1$ et $(n+1)! + 1$ sont premiers entre eux.

c) Soit p un nombre premier. Démontrer que $1^{p-1} + 2^{p-1} + \cdots + (p-1)^{p-1} \equiv -1 \ [p]$.

d) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Démontrer que $n^4 + 4$ n'est pas un nombre premier. On pourra écrire $n^4 + 4 = (n^2+2)^2 - 4n^2$.

Exercice 3 – Problème — Un chiffrement RSA miniature *(5 pts)*

a) On pose $p = 5$, $q = 11$, $N = pq = 55$ et $(p-1)(q-1) = 40$. Justifier que 3 est inversible modulo 40 et déterminer l'entier d tel que $0 < d < 40$ et $3d \equiv 1 \ [40]$.

b) Démontrer que, pour tout entier m, $m^{81} \equiv m \ [5]$.

c) Démontrer de même que $m^{81} \equiv m \ [11]$, puis que $m^{81} \equiv m \ [55]$ pour tout entier m.

d) Un message est un entier m tel que $0 \leqslant m \leqslant 54$; on le chiffre par le reste c de m^3 modulo 55. On reçoit $c = 13$. Démontrer que $m \equiv 13^{27} \ [55]$.

e) Calculer les restes de 13^{27} modulo 5 et modulo 11, puis en déduire m.

Exercice 4 – Problème — Deux lignes de bus *(4 pts)*

a) Le bus A passe à un arrêt à 7 h 12, puis toutes les 35 minutes ; le bus B passe au même arrêt à 7 h 05, puis toutes les 24 minutes. Les deux lignes circulent jusqu'à 23 h. On mesure le temps t en minutes à partir de 7 h 00. Montrer que les deux bus passent ensemble à l'instant t si et seulement s'il existe des entiers naturels x et y tels que $t = 12 + 35x = 5 + 24y$, puis que $24y - 35x = 7$.

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $24y - 35x = 7$.

c) En déduire l'heure à laquelle les deux bus passent ensemble pour la première fois dans la journée. Se retrouvent-ils une seconde fois avant 23 h ?

d) Le bus C passe au même arrêt à 7 h 03, puis toutes les 21 minutes. Démontrer que les bus A et C ne passent jamais ensemble.

Exercice 5 – Pour aller plus loin *(4 pts)*

a) On cherche les couples $(x\,;y)$ d'entiers naturels tels que $x^2 - y^2 = 2\,025$. Montrer que, pour un tel couple, $x - y$ et $x + y$ sont deux diviseurs positifs de $2\,025$ dont le produit vaut $2\,025$ et tels que $x - y \leqslant x + y$.

b) Décomposer $2\,025$ en produit de facteurs premiers, puis déterminer tous les couples solutions.

c) Démontrer que l'équation $x^2 - y^2 = 2\,026$ n'a aucune solution dans $\mathbb{Z}^2$.

d) Démontrer qu'un entier naturel N s'écrit comme différence de deux carrés d'entiers si et seulement si $N \not\equiv 2\ [4]$.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).