Devoir surveillé – Divisibilité, PGCD, congruences, Bézout, Gauss et nombres premiers — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths expertes Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes *(4 pts)*

a) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2^{100} par 9.

b) Déterminer un inverse de 7 modulo 30, puis résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $7x \equiv 4\ [30]$.

c) On pose $a = 2^5 \times 3^2 \times 7$ et $b = 2^3 \times 3^4 \times 5$. Déterminer $\text{pgcd}(a\,;b)$ et le nombre de diviseurs communs positifs de a et b.

d) Un entier naturel de quatre chiffres s'écrit, de gauche à droite, avec les chiffres a, b, b et a, où $a \neq 0$ (par exemple $3\,773$). Démontrer qu'il est divisible par 11.

Exercice 2 – Qui a raison ? *(4 pts)*

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse, puis justifier.

a) « Si un entier n est tel que n^2 est divisible par 12, alors n est divisible par 6. »

b) « Si un entier a divise b^2, alors a divise b. »

c) « Si p est un nombre premier supérieur ou égal à 5, alors $p^2 - 1$ est divisible par 24. »

d) « Si un entier x vérifie $x^2 \equiv 1\ [15]$, alors $x \equiv 1\ [15]$ ou $x \equiv -1\ [15]$. »

Exercice 3 – Problème — Un chiffrement affine *(5 pts)*

a) On numérote les lettres de $A = 0$ à $Z = 25$. Pour chiffrer la lettre de rang x, on calcule le reste y de $11x + 8$ modulo 26 ; la lettre chiffrée est celle de rang y. Chiffrer les lettres E (rang 4) et T (rang 19).

b) À l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer un inverse de 11 modulo 26 compris entre 0 et 25.

c) Démontrer que, pour tous entiers x et y : $y \equiv 11x + 8\ [26] \iff x \equiv 19y + 4\ [26]$.

d) Déchiffrer le mot AUZAN.

e) Déterminer toutes les lettres qui sont chiffrées par elles-mêmes.

Exercice 4 – Problème — Un robot sur une droite graduée *(3 pts)*

a) Un robot se déplace sur une droite graduée en centimètres : chaque pas en avant le fait avancer de 29 cm, chaque pas en arrière le fait reculer de 12 cm. Parti de l'origine, il fait x pas en avant et y pas en arrière, dans un ordre quelconque, et s'arrête au point d'abscisse 2. Justifier que $29x - 12y = 2$, puis trouver, à l'aide de l'algorithme d'Euclide, un couple d'entiers relatifs solution de cette équation.

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $29x - 12y = 2$.

c) Le robot peut-il s'arrêter au point d'abscisse 2 après exactement 75 pas ? après exactement 100 pas ?

Exercice 5 – Problème — Les nombres $2^n - 1$ *(4 pts)*

a) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $M_n = 2^n - 1$. Montrer que 3 divise M_n si et seulement si n est pair.

b) Étudier les restes de 2^n modulo 7, puis déterminer les entiers $n \geqslant 1$ tels que 7 divise M_n.

c) Soit $n = rs$ avec r et s entiers supérieurs ou égaux à 2. Montrer que M_r divise M_n, puis en déduire que si M_n est premier ($n \geqslant 2$), alors n est premier.

d) Montrer, sans calculer 2^{11}, que $2^{11} \equiv 1 \ [23]$. La réciproque de la propriété démontrée en c) est-elle vraie ?

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).