Devoir surveillé – Divisibilité, PGCD, congruences, Bézout, Gauss et nombres premiers — niveau ★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths expertes Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes *(5 pts)*

a) Effectuer la division euclidienne de -85 par 6.

b) Déterminer le reste de la division euclidienne de 6^{41} par 7.

c) Déterminer $\text{pgcd}(546\,;234)$ à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

d) Décomposer $1\,400$ en produit de facteurs premiers, puis en déduire le nombre de ses diviseurs positifs.

e) Montrer que 17 et 12 sont premiers entre eux en écrivant une relation de Bézout.

Exercice 2 – Un tableau de congruences *(4 pts)*

a) Pour tout entier n, on pose $A = n^2 + n + 1$. Recopier et compléter le tableau des restes de A modulo 3 selon le reste de n modulo 3.

b) En déduire les entiers n pour lesquels A est divisible par 3.

c) On pose $n = 3k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que $A = 3(3k^2 + 3k + 1)$, puis que A n'est jamais divisible par 9.

d) Pour $n = 1$, 2 et 3, A vaut 3, 7 et 13, qui sont des nombres premiers. Un élève en conclut que A est premier pour tout entier $n \geqslant 1$. Montrer qu'il a tort.

Exercice 3 – Une équation diophantienne *(5 pts)*

a) Montrer, à l'aide de l'algorithme d'Euclide, que $\text{pgcd}(13\,;8) = 1$.

b) En déduire un couple d'entiers relatifs $(u\,;v)$ tel que $13u + 8v = 1$.

c) On considère l'équation $(E) : 13x + 8y = 5$, d'inconnue $(x\,;y) \in \mathbb{Z}^2$. En déduire une solution particulière de (E).

d) Résoudre (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

e) En déduire les entiers x tels que $13x \equiv 5\ [8]$.

Exercice 4 – Premiers, puissances et fractions *(6 pts)*

a) Montrer que 227 est un nombre premier.

b) À l'aide du petit théorème de Fermat, déterminer le reste de la division euclidienne de 3^{503} par 11.

c) Décomposer $1\,260$ et $1\,188$ en produits de facteurs premiers, puis en déduire $\text{pgcd}(1\,260\,;1\,188)$.

d) En déduire l'écriture irréductible de la fraction $\dfrac{1\,188}{1\,260}$, en justifiant qu'elle est irréductible.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).