

Devoir surveillé – Arithmétique — théorèmes de Bézout et de Gauss

Coefficients de Bézout, identité de Bézout, théorème de Gauss et applications : programme de Maths expertes Terminale

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths expertes (option Tle) Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Algorithme d'Euclide étendu (4 pts)

- a) a) Déterminer $\text{pgcd}(413 ; 95)$ en détaillant l'algorithme d'Euclide.
- b) b) En déduire un couple d'entiers relatifs $(u ; v)$ tel que $413u + 95v = 1$.
- c) c) Déterminer tous les couples d'entiers relatifs $(u ; v)$ vérifiant cette égalité.
- d) d) En déduire l'inverse de 95 modulo 413, compris entre 0 et 412.

Exercice 2 – Équation diophantienne (4 pts)

- a) On considère l'équation $(E) : 41x + 24y = 3$, d'inconnue $(x ; y)$ dans $\mathbb{Z}^2$.
 - a) Justifier que (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.
- b) b) Déterminer une solution particulière de (E) .
- c) c) Résoudre (E) dans $\mathbb{Z}^2$.
- d) d) Déterminer l'unique solution de (E) telle que $0 \leq x \leq 23$.

Exercice 3 – Inverse modulaire et congruences (4 pts)

- a) a) Justifier que 16 est inversible modulo 35 et déterminer son inverse compris entre 0 et 34.
- b) b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $16x \equiv 9 [35]$.
- c) c) En déduire le plus petit entier naturel solution de cette équation.
- d) d) Expliquer pourquoi l'équation $14x \equiv 9 [35]$ n'admet, elle, aucune solution.

Exercice 4 – Théorème de Gauss (4 pts)

- a) a) Soit n un entier relatif tel que 9 divise $22n$. Montrer que 9 divise n .
- b) b) Montrer que, pour tout entier relatif n , les entiers $8n + 3$ et $5n + 2$ sont premiers entre eux.
- c) c) Un entier N est divisible par 25 et par 18. Montrer que N est divisible par 450.
- d) d) Donner un entier divisible par 15 et par 9 qui n'est pas divisible par 135, puis expliquer pourquoi cela ne contredit pas la question c).

Exercice 5 – Vrai ou faux, avec justification*(4 pts)*

- a) Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse (une démonstration ou un contre-exemple).
- a) « S'il existe des entiers u et v tels que $10u + 15v = 20$, alors $\text{pgcd}(10 ; 15) = 20$. »
- b) « Si a divise $6b$ et si a est premier avec 3, alors a divise $2b$. »
- c) « L'équation $21x + 35y = 14$ admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$. »
- d) « Tout entier relatif admet un inverse modulo 16. »

Bon courage !