Corrigé et barème – Arithmétique — théorèmes de Bézout et de Gauss

Coefficients de Bézout, identité de Bézout, théorème de Gauss et applications : programme de Maths expertes Terminale

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths expertes (option Tle) Terminale

---

Exercice 1 – Algorithme d'Euclide étendu *(4 pts)*

a) $413 = 4 \times 95 + 33$; $95 = 2 \times 33 + 29$; $33 = 1 \times 29 + 4$; $29 = 7 \times 4 + 1$; $4 = 4 \times 1 + 0$. Dernier reste non nul : $\text{pgcd}(413\,;95) = 1$. (1)

b) Remontée : $1 = 29 - 7 \times 4 = 29 - 7(33 - 29) = 8 \times 29 - 7 \times 33 = 8(95 - 2 \times 33) - 7 \times 33 = 8 \times 95 - 23 \times 33 = 8 \times 95 - 23(413 - 4 \times 95) = 100 \times 95 - 23 \times 413$. Donc $(u\,;v) = (-23\,;100)$, car $9500 - 9499 = 1$. (1)

c) Si $413u + 95v = 1$, alors $413(u + 23) = 95(100 - v)$; comme $\text{pgcd}(413\,;95) = 1$, Gauss donne $95 \mid u + 23$, d'où $u = -23 + 95k$ et $v = 100 - 413k$, $k \in \mathbb{Z}$. (1)

d) De $413 \times (-23) + 95 \times 100 = 1$ on tire $95 \times 100 \equiv 1\ [413]$: l'inverse de 95 modulo 413 est 100 ($95 \times 100 = 9500 = 23 \times 413 + 1$). (1)

Le point clé — Pendant la remontée, ne jamais effectuer les produits : on garde 413 et 95 apparents et on ne regroupe que leurs coefficients.

Exercice 2 – Équation diophantienne *(4 pts)*

a) $41 = 1 \times 24 + 17$; $24 = 1 \times 17 + 7$; $17 = 2 \times 7 + 3$; $7 = 2 \times 3 + 1$, donc $\text{pgcd}(41\,;24) = 1$. Comme 1 divise 3, (E) admet des solutions. (1)

b) Remontée : $1 = 7 - 2 \times 3 = 5 \times 7 - 2 \times 17 = 5 \times 24 - 7 \times 17 = 12 \times 24 - 7 \times 41$. En multipliant par 3 : $41 \times (-21) + 24 \times 36 = 3$ ($-861 + 864 = 3$), donc $(-21\,;36)$ convient. (1)

c) Par soustraction, $41(x + 21) = 24(36 - y)$; comme $\text{pgcd}(41\,;24) = 1$, Gauss donne $24 \mid x + 21$, d'où $x = -21 + 24k$ et $y = 36 - 41k$. $S = \{(-21 + 24k\,;36 - 41k),\ k \in \mathbb{Z}\}$. (1)

d) $0 \leqslant -21 + 24k \leqslant 23$ donne $0{,}87 \leqslant k \leqslant 1{,}83$, donc $k = 1$: la solution est $(3\,;-5)$, car $123 - 120 = 3$. (1)

Erreur fréquente — Le pas de la solution générale est $\frac{b}{d}$ pour x et $-\frac{a}{d}$ pour y : oublier de diviser par le PGCD fait perdre des solutions.

Exercice 3 – Inverse modulaire et congruences *(4 pts)*

a) $35 = 2 \times 16 + 3$; $16 = 5 \times 3 + 1$, donc $\text{pgcd}(16\,;35) = 1$ et 16 est inversible. Remontée : $1 = 16 - 5 \times 3 = 16 - 5(35 - 2 \times 16) = 11 \times 16 - 5 \times 35$, donc l'inverse est 11 ($16 \times 11 = 176 = 5 \times 35 + 1$). (1)

b) En multipliant par 11 : $x \equiv 11 \times 9 = 99\ [35]$, et $99 = 2 \times 35 + 29$, donc $x \equiv 29\ [35]$. Réciproque vérifiée : $16 \times 29 = 464 = 13 \times 35 + 9$. (1)

c) Les solutions sont les $29 + 35k$; le plus petit entier naturel est 29. (1)

d) S'il existait x et k tels que $14x - 35k = 9$, alors 7, qui divise 14 et 35, diviserait 9 : c'est faux. Autrement dit $\text{pgcd}(14\,;35) = 7$ ne divise pas 9, donc l'équation n'a pas de solution. (1)

Attention — Avant toute résolution de $ax \equiv b\ [n]$, calculer $\text{pgcd}(a\,;n)$: sans coprimalité, l'inverse n'existe pas et l'équation peut être impossible.

Exercice 4 – Théorème de Gauss *(4 pts)*

a) $9 \times 5 - 2 \times 22 = 45 - 44 = 1$, donc $\text{pgcd}(9\,;22) = 1$ d'après le théorème de Bézout. Comme 9 divise $22n$ et est premier avec 22, le théorème de Gauss donne $9 \mid n$. (1)

b) $5(8n+3) - 8(5n+2) = 40n + 15 - 40n - 16 = -1$, donc $(-5)(8n+3) + 8(5n+2) = 1$: d'après le théorème de Bézout, les deux entiers sont premiers entre eux quel que soit n. (1)

c) $25 \times 13 - 18 \times 18 = 325 - 324 = 1$, donc $\text{pgcd}(25\,;18) = 1$. Comme 25 et 18 divisent N et sont premiers entre eux, le corollaire du théorème de Gauss donne $25 \times 18 = 450$ divise N. (1)

d) $45 = 3 \times 15 = 5 \times 9$ est divisible par 15 et par 9, mais $45 < 135$ donc 135 ne divise pas 45. Aucune contradiction : $\text{pgcd}(15\,;9) = 3 \neq 1$, l'hypothèse de coprimalité du corollaire n'est pas vérifiée. (1)

Repère — Pour prouver que deux expressions en n sont premières entre elles, on cherche la combinaison linéaire qui élimine n et vaut ± 1.

Exercice 5 – Vrai ou faux, avec justification *(4 pts)*

a) Fausse. Le couple $(2\,;0)$ donne bien $10 \times 2 + 15 \times 0 = 20$, mais $\text{pgcd}(10\,;15) = 5$. Une combinaison linéaire est seulement un multiple du PGCD ; seul le cas où elle vaut 1 est concluant. (1)

b) Vraie. a divise $6b = 3 \times (2b)$ et a est premier avec 3 : le théorème de Gauss donne $a \mid 2b$. (1)

c) Vraie. $\text{pgcd}(21\,;35) = 7$ et $14 = 2 \times 7$, donc la condition d'existence est vérifiée. Une solution explicite : $21 \times (-1) + 35 \times 1 = 14$. (1)

d) Fausse. L'entier 6 n'a pas d'inverse modulo 16, car $\text{pgcd}(6\,;16) = 2 \neq 1$: tout produit $6u$ est pair, donc ne peut être congru à 1 modulo 16. (1)

À retenir — Une affirmation fausse se réfute par un contre-exemple explicite et chiffré, jamais par une phrase générale.