

Devoir surveillé – Arithmétique — nombres premiers et décomposition

Divisibilité, nombres premiers, décomposition en facteurs premiers et applications (programme Maths expertes Terminale)

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths expertes (option Tle) Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Primalité, décomposition et diviseurs (4 pts)

- a) a) Montrer que 409 est un nombre premier, en précisant les diviseurs testés et pourquoi on peut s'arrêter.
- b) b) Décomposer 2970 en produit de facteurs premiers.
- c) c) En déduire le nombre de diviseurs positifs de 2970.
- d) d) Calculer la somme des diviseurs positifs de 2970.

Exercice 2 – PGCD, PPCM et fraction irréductible (4 pts)

- a) a) Décomposer 5148 et 3432 en produits de facteurs premiers.
- b) b) En déduire PGCD(5148 ; 3432).
- c) c) En déduire PPCM(5148 ; 3432), puis vérifier le résultat à l'aide du produit 5148×3432 .
- d) d) Rendre irréductible la fraction $\frac{3432}{5148}$.

Exercice 3 – Exposants, carrés et quotients (4 pts)

- a) a) Décomposer 1908 en produit de facteurs premiers.
- b) b) Montrer que 1908 n'est pas un carré parfait.
- c) c) Déterminer le plus petit entier $k \geq 1$ tel que $1908k$ soit un carré parfait, et donner ce carré.
- d) d) Déterminer le plus petit entier $m \geq 1$ tel que $\frac{1908}{m}$ soit un entier et un carré parfait.

Exercice 4 – Problèmes de diviseurs (4 pts)

- a) a) Montrer qu'un entier possédant exactement trois diviseurs positifs est le carré d'un nombre premier.
- b) b) En déduire la liste de tous les entiers inférieurs à 200 possédant exactement trois diviseurs positifs.
- c) c) On pose $N = 2^5 \times 11^2$. Déterminer le nombre de diviseurs positifs de N , puis combien d'entre eux sont des carrés parfaits.
- d) d) Un élève écrit que la somme des diviseurs de N vaut $(1 + 2^5)(1 + 11^2) = 33 \times 122$. Expliquer son erreur et donner la valeur correcte.

Exercice 5 – Nombres premiers : critères et infinité*(4 pts)*

- a) a) Démontrer que si un entier $n \geq 2$ n'est divisible par aucun nombre premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$, alors n est premier.
- b) b) Appliquer ce critère à 1447.
- c) c) Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.
- d) d) Montrer que si les trois entiers n , $n + 2$ et $n + 4$ sont tous premiers, alors $n = 3$.

Bon courage !