

Corrigé et barème – Arithmétique — nombres premiers et décomposition

Divisibilité, nombres premiers, décomposition en facteurs premiers et applications (programme Maths expertes Terminale)

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths expertes (option Tle) Terminale

Exercice 1 – Primalité, décomposition et diviseurs

(4 pts)

- $20^2 = 400 \leq 409 < 441 = 21^2$: on teste les nombres premiers jusqu'à 20, soit 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. 409 est impair, $4 + 0 + 9 = 13$, il ne finit ni par 0 ni par 5, $7 \times 58 = 406$, $11 \times 37 = 407$, $13 \times 31 = 403$, $17 \times 24 = 408$, $19 \times 21 = 399$: aucun reste nul. Tout entier composé ayant un diviseur premier inférieur ou égal à sa racine carrée, 409 est premier. (1)
- $2970 = 2 \times 1485$; $1 + 4 + 8 + 5 = 18$ donc $1485 = 3 \times 495 = 3^2 \times 165 = 3^3 \times 55$ et $55 = 5 \times 11$. Donc $2970 = 2 \times 3^3 \times 5 \times 11$. (1)
- $(1+1)(3+1)(1+1)(1+1) = 2 \times 4 \times 2 \times 2 = 32$ diviseurs positifs. (1)
- $\sigma(2970) = (1+2)(1+3+9+27)(1+5)(1+11) = 3 \times 40 \times 6 \times 12 = 8640$. (1)

Le point clé — Le critère de la racine carrée doit être justifié, pas seulement appliqué : c'est lui qui autorise à s'arrêter.

Exercice 2 – PGCD, PPCM et fraction irréductible

(4 pts)

- $5148 = 2^2 \times 1287 = 2^2 \times 3^2 \times 143 = 2^2 \times 3^2 \times 11 \times 13$; $3432 = 2^3 \times 429 = 2^3 \times 3 \times 143 = 2^3 \times 3 \times 11 \times 13$. (1)
- Exposants minimaux des facteurs communs : $2^2 \times 3 \times 11 \times 13 = 1716$. (1)
- Exposants maximaux : $2^3 \times 3^2 \times 11 \times 13 = 10\,296$. Vérification : $1716 \times 10\,296 = 17\,667\,936$ et $5148 \times 3432 = 17\,667\,936$. (1)
- On divise numérateur et dénominateur par 1716 : $3432 = 2 \times 1716$ et $5148 = 3 \times 1716$, donc la fraction vaut $\frac{2}{3}$, irréductible. (1)

Erreur fréquente — Le PGCD ne retient que les facteurs premiers communs, le PPCM les retient tous : inverser min et max fausse les deux résultats à la fois.

Exercice 3 – Exposants, carrés et quotients

(4 pts)

- $1908 = 2^2 \times 477$ et $4 + 7 + 7 = 18$, donc $477 = 3^2 \times 53$ avec 53 premier : $1908 = 2^2 \times 3^2 \times 53$. (1)
- Un carré parfait a tous ses exposants pairs dans sa décomposition ; ici l'exposant de 53 vaut 1, qui est impair. Donc 1908 n'est pas un carré parfait. (1)
- Il faut rendre pair l'exposant de 53 : $k = 53$, et $1908 \times 53 = 2^2 \times 3^2 \times 53^2 = (2 \times 3 \times 53)^2 = 318^2 = 101\,124$. (1)
- Il faut au contraire supprimer le facteur 53 : $m = 53$ donne $\frac{1908}{53} = 36 = 6^2$, qui est bien un carré parfait. (1)

Repère — Tout se lit sur la parité des exposants : on complète ceux qui manquent, ou on retire ceux qui gênent.

Exercice 4 – Problèmes de diviseurs

(4 pts)

- a) Si $n = p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r}$, alors $d(n) = (a_1 + 1) \dots (a_r + 1) = 3$. Comme 3 est premier, le produit n'a qu'un seul facteur différent de 1 : $r = 1$ et $a_1 + 1 = 3$, donc $n = p^2$ avec p premier. (1)
- b) On prend les carrés des nombres premiers inférieurs à 200 : 4, 9, 25, 49, 121 et 169 (le suivant, $17^2 = 289$, dépasse 200). (1)
- c) $d(N) = (5 + 1)(2 + 1) = 18$ diviseurs. Ceux qui sont des carrés parfaits ont des exposants pairs : 2^b avec $b \in \{0; 2; 4\}$ et 11^c avec $c \in \{0; 2\}$, soit $3 \times 2 = 6$ diviseurs. (1)
- d) Il faut additionner toutes les puissances de chaque facteur, et non les seules puissances extrêmes : $\sigma(N) = (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32)(1 + 11 + 121) = 63 \times 133 = 8379$. La formule de l'élève oublie les termes intermédiaires et donne 4026, valeur trop petite. (1)

Attention — La somme des diviseurs fait intervenir toutes les puissances de chaque facteur premier, de l'exposant 0 à l'exposant maximal.

Exercice 5 – Nombres premiers : critères et infinité

(4 pts)

- a) Par contraposée : si n est composé, $n = ab$ avec $2 \leq a \leq b$, donc $a^2 \leq ab = n$ et $a \leq \sqrt{n}$. Or $a \geq 2$ admet un diviseur premier $p \leq a \leq \sqrt{n}$, et $p \mid a$, $a \mid n$ donnent $p \mid n$. Un entier composé a donc un diviseur premier inférieur ou égal à sa racine carrée. (1)
- b) $38^2 = 1444 \leq 1447 < 1521 = 39^2$: on teste 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37. 1447 est impair, $1 + 4 + 4 + 7 = 16$, il ne finit ni par 0 ni par 5, $7 \times 206 = 1442$, $11 \times 131 = 1441$, $13 \times 111 = 1443$, $17 \times 85 = 1445$, $19 \times 76 = 1444$, $23 \times 62 = 1426$, $29 \times 49 = 1421$, $31 \times 46 = 1426$, $37 \times 39 = 1443$. Aucun reste nul : 1447 est premier. (1)
- c) Par l'absurde : si $p_1, \dots, p_r$ étaient tous les nombres premiers, l'entier $N = p_1 \times \dots \times p_r + 1 \geq 3$ admettrait un diviseur premier p , nécessairement égal à un p_i . Alors p diviserait le produit et N , donc leur différence 1, ce qui est impossible car $p \geq 2$. (1)
- d) La division euclidienne de n par 3 donne $n = 3q + r$ avec $r \in \{0; 1; 2\}$. Si $r = 0$, 3 divise n ; si $r = 1$, 3 divise $n + 2$; si $r = 2$, 3 divise $n + 4$. Dans tous les cas l'un des trois est divisible par 3 ; comme il est premier, il vaut 3. Or $n + 2 = 3$ donne $n = 1$ (non premier) et $n + 4 = 3$ est impossible. Donc $n = 3$, et le triplet est (3 ; 5 ; 7). (1)

À retenir — Les deux démonstrations exigibles du chapitre se rédigent en quelques lignes, à condition de ne jamais affirmer que l'entier construit par Euclide est premier.