Divisibilité, division euclidienne et PGCD

Fiche méthode

(Maths expertes Terminale · Arithmétique)

La démarche pour une question d'arithmétique

1. Je traduis chaque phrase en égalité d'entiers : « b divise a » donne $a = kb$; « le reste par b vaut r » donne $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$; « le PGCD vaut d » donne $a = da'$, $b = db'$ avec a' et b' premiers entre eux.

2. Je choisis l'outil : combinaison linéaire, division euclidienne, disjonction des cas, algorithme d'Euclide.

3. Je calcule en écrivant chaque division euclidienne en entier, avec la condition sur le reste.

4. Je conclus en nommant la propriété utilisée, puis je vérifie la réciproque ou un exemple numérique.

Le réflexe — chaque lettre introduite doit être déclarée entière : « K est un entier, donc ... est un multiple de n ». Sans cette phrase, la preuve est incomplète.

Cas 1 · Démontrer un multiple ou une parité

Réflexe — j'écris le nombre sous la forme n × K (ou 2K + 1) en justifiant que K est entier ; si la parité compte, je traite n = 2k puis n = 2k + 1.

Exemple. Questions types : « Montrer que ... est un multiple de ... pour tout entier n », « Montrer que ... est pair ». Exemple : montrer que $n^2 + 3n + 6$ est pair pour tout entier n.

$n^2 + 3n + 6 = n(n+3) + 6$.

Si $n = 2k$: $n(n+3) = 2 \times k(2k+3)$ est pair. Si $n = 2k+1$: $n+3 = 2(k+2)$, donc $n(n+3) = 2 \times (2k+1)(k+2)$ est pair.

Dans les deux cas, $n^2 + 3n + 6$ est la somme de deux nombres pairs : il est pair.

Attention — deux impairs quelconques s'écrivent avec deux lettres : 2k + 1 et 2p + 1.

Cas 2 · Résoudre une équation de divisibilité

Réflexe — je fais apparaître un multiple du diviseur pour me ramener aux diviseurs d'une constante.

Exemple. Questions types : « Déterminer les entiers n tels que ... divise ... ». Exemple : entiers relatifs n tels que $n - 1$ divise $2n + 9$.

$2n + 9 = 2(n-1) + 11$, et $n - 1$ divise $2(n-1)$: $n - 1$ divise $2n + 9$ si et seulement s'il divise 11.

Diviseurs de 11 dans $\mathbb{Z}$: -11, -1, 1, 11. Donc $n - 1 \in \{-11\,;-1\,;1\,;11\}$.

Les solutions sont $n = -10$, 0, 2 et 12.

Attention — ne pas oublier les diviseurs négatifs dans $\mathbb{Z}$, et vérifier la réciproque si l'on n'a écrit que des implications.

Cas 3 · Division euclidienne et changement de diviseur

Réflexe — je prends le plus grand multiple du diviseur inférieur ou égal au dividende, puis je vérifie 0 ≤ r < b.

Exemple. Questions types : « Effectuer la division euclidienne de ... », « En déduire le reste par ... ». Exemple : division de -500 par 13, puis reste par 13 de $N = 39q + 30$.

$13 \times 38 = 494$, donc $500 = 13 \times 38 + 6$ et $-500 = 13 \times (-38) - 6 = 13 \times (-39) + 7$, avec $0 \leqslant 7 < 13$: quotient -39, reste 7.

$39 = 13 \times 3$ et $30 = 13 \times 2 + 4$, donc $N = 13(3q+2) + 4$ avec $0 \leqslant 4 < 13$: le reste vaut 4.

Attention — le reste n'est jamais négatif : -6 n'est pas un reste.

Cas 4 · Calculer un PGCD par l'algorithme d'Euclide

Réflexe — je divise le plus grand par le plus petit, puis le diviseur par le reste ; le PGCD est le dernier reste non nul.

Exemple. Questions types : « Déterminer le PGCD en détaillant l'algorithme d'Euclide », « En déduire les diviseurs communs ». Exemple : pgcd(4 199 ; 2 093).

$4\,199 = 2 \times 2\,093 + 13$, puis $2\,093 = 161 \times 13 + 0$.
Le dernier reste non nul est 13 : $\text{pgcd}(4\,199 ; 2\,093) = 13$. Contrôle : $4\,199 = 13 \times 323$ et $2\,093 = 13 \times 161$.
Les diviseurs communs positifs sont ceux de 13 : 1 et 13.

Attention — le PGCD est le dernier reste non nul, pas le dernier quotient ; pgcd(a ; 0) = a.

Cas 5 · Utiliser un PGCD imposé

Réflexe — $a = da'$ et $b = db'$ avec a' et b' premiers entre eux, puis je traduis la condition sur a' et b'.

Exemple. Questions types : « Déterminer les couples tels que le PGCD vaut … et la somme (ou le produit) vaut … ». Exemple : $a \leqslant b$, $\text{pgcd}(a ; b) = 6$ et $ab = 1\,080$.

$a = 6a'$, $b = 6b'$ avec a' et b' premiers entre eux, $a' \leqslant b'$. Alors $36a'b' = 1\,080$, soit $a'b' = 30$.
Couples de produit 30 formés d'entiers premiers entre eux : $(1 ; 30)$, $(2 ; 15)$, $(3 ; 10)$, $(5 ; 6)$.
Solutions : $(6 ; 180)$, $(12 ; 90)$, $(18 ; 60)$, $(30 ; 36)$.

Attention — éliminer les couples (a′ ; b′) qui ne sont pas premiers entre eux.

Cas 6 · PGCD de deux expressions en n

Réflexe — d diviseur commun, combinaison linéaire qui élimine n, d divise une constante, puis recherche des valeurs atteintes.

Exemple. Questions types : « Montrer que tout diviseur commun divise … », « Déterminer le PGCD selon n », « La fraction est-elle irréductible ? ». Exemple : $\text{pgcd}(2n + 7 ; n + 2)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Un diviseur commun divise $(2n + 7) - 2(n + 2) = 3$: le PGCD vaut 1 ou 3.
3 divise $n + 2$ si et seulement si $n = 3k + 1$, et alors 3 divise aussi $2n + 7 = 2(n + 2) + 3$.
Le PGCD vaut 3 si $n = 3k + 1$ (par exemple $n = 1$: 9 et 3), et 1 sinon.

Attention — « d divise 3 » ne dit pas que le PGCD vaut 3 : il faut trouver les n pour lesquels c'est le cas.

Les pièges

- Un reste est positif ou nul et strictement inférieur au diviseur.
- « b divise a » s'écrit a = kb, pas b = ka.
- d divise ab n'entraîne pas que d divise a ou d divise b.
- Premiers entre eux ne veut pas dire premiers : 9 et 28 sont premiers entre eux.
- Tout entier divise 0, mais 0 ne divise que 0 ; pgcd(a ; 0) = a.
- Montrer qu'un diviseur commun divise 6 ne prouve pas que le PGCD vaut 6.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).