

Devoir surveillé – Arithmétique — divisibilité, PGCD et algorithme d'Euclide

Divisibilité dans $\mathbb{Z}$, division euclidienne, PGCD et PPCM : fondements de l'arithmétique au programme de l'option Maths expertes (Terminale)

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths expertes (option Tle) Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Divisions euclidiennes

(4 pts)

- a) a) Effectuer la division euclidienne de 3 271 par 48.
- b) b) En déduire la division euclidienne de $-3\,271$ par 48.
- c) c) Déterminer le reste de la division euclidienne de 3 271 par 16.
- d) d) Montrer qu'aucun entier de la forme $48q + 7$, avec $q \in \mathbb{Z}$, n'est divisible par 2 ni par 3.

Exercice 2 – Algorithme d'Euclide

(4 pts)

- a) a) Déterminer $\text{pgcd}(3\,869 ; 2\,279)$ en détaillant toutes les divisions de l'algorithme d'Euclide.
- b) b) En déduire $\text{ppcm}(3\,869 ; 2\,279)$.
- c) c) Écrire la fraction $\frac{2\,279}{3\,869}$ sous forme irréductible et justifier l'irréductibilité.
- d) d) Déterminer tous les diviseurs communs positifs de 3 869 et 2 279.

Exercice 3 – Équations de divisibilité

(4 pts)

- a) a) Montrer que, pour tout entier relatif n , $n^2 + 2n - 5 = (n - 2)(n + 4) + 3$.
- b) b) En déduire tous les entiers relatifs n tels que $n - 2$ divise $n^2 + 2n - 5$.
- c) c) Déterminer tous les entiers naturels n tels que $3n + 1$ divise $n + 9$.
- d) d) Soit d un diviseur commun de $n + 4$ et $n - 2$. Montrer que d divise 6.

Exercice 4 – PGCD dépendant d'un entier

(4 pts)

- a) Pour tout entier naturel n , on pose $A = 2n + 5$ et $B = 7n + 12$. a) Calculer A , B et $\text{pgcd}(A ; B)$ pour $n = 3$, puis pour $n = 8$.
- b) b) Montrer que tout diviseur commun de A et B divise 11.
- c) c) En déduire les valeurs possibles de $\text{pgcd}(A ; B)$, puis déterminer tous les entiers naturels n pour lesquels ce PGCD vaut 11.
- d) d) Pour quelles valeurs de n la fraction $\frac{7n + 12}{2n + 5}$ est-elle irréductible ?

Exercice 5 – Deux capteurs synchronisés*(4 pts)*

- a) Dans une station de mesure, un capteur A enregistre une donnée toutes les 132 secondes et un capteur B toutes les 198 secondes. À l'instant initial, les deux capteurs enregistrent en même temps.
- a) Déterminer $\text{pgcd}(132 ; 198)$ par l'algorithme d'Euclide, puis $\text{ppcm}(132 ; 198)$.
- b) Au bout de combien de temps, exprimé en minutes et secondes, les deux capteurs enregistrent-ils de nouveau en même temps ? Combien d'enregistrements chacun a-t-il alors effectués depuis l'instant initial ?
- c) Combien de fois les deux capteurs enregistrent-ils simultanément au cours des deux premières heures, instant initial non compris ?
- d) Un capteur C, qui enregistre toutes les 90 secondes, démarre lui aussi à l'instant initial. Déterminer au bout de combien de temps les trois capteurs enregistrent de nouveau simultanément.

Bon courage !