

Corrigé et barème – Arithmétique — divisibilité, PGCD et algorithme d'Euclide

Divisibilité dans $\mathbb{Z}$, division euclidienne, PGCD et PPCM : fondements de l'arithmétique au programme de l'option Maths expertes (Terminale)

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths expertes (option Tle) Terminale

Exercice 1 – Divisions euclidiennes

(4 pts)

- a) $48 \times 68 = 3\,264$ et $3\,271 - 3\,264 = 7$, donc $3\,271 = 48 \times 68 + 7$ avec $0 \leq 7 < 48$: quotient 68, reste 7. (1)
- b) $-3\,271 = 48 \times (-68) - 7 = 48 \times (-69) + 41$ car $-7 + 48 = 41$; comme $0 \leq 41 < 48$, le quotient est -69 et le reste 41. (1)
- c) $48 = 16 \times 3$, donc $3\,271 = 16 \times (3 \times 68) + 7 = 16 \times 204 + 7$ avec $0 \leq 7 < 16$: le reste vaut 7. (1)
- d) $48q$ est pair et 7 est impair, donc $48q + 7$ est impair : il n'est pas divisible par 2. De plus $48q = 3 \times 16q$ et $7 = 3 \times 2 + 1$, donc $48q + 7 = 3(16q + 2) + 1$: le reste par 3 vaut 1, non nul. (1)

Erreur fréquente — Le quotient d'un entier négatif n'est pas l'opposé du quotient de son opposé : on descend d'une unité pour rendre le reste positif.

Exercice 2 – Algorithme d'Euclide

(4 pts)

- a) $3\,869 = 1 \times 2\,279 + 1\,590$; $2\,279 = 1 \times 1\,590 + 689$; $1\,590 = 2 \times 689 + 212$; $689 = 3 \times 212 + 53$; $212 = 4 \times 53 + 0$. Le PGCD vaut 53. (1)
- b) $3\,869 = 53 \times 73$ et $2\,279 = 53 \times 43$, donc $\text{ppcm} = \frac{3\,869 \times 2\,279}{53} = 3\,869 \times 43 = 166\,367$. (1)
- c) $\frac{2\,279}{3\,869} = \frac{53 \times 43}{53 \times 73} = \frac{43}{73}$; 43 et 73 sont premiers et distincts, donc premiers entre eux : la fraction est irréductible. (1)
- d) Les diviseurs communs sont les diviseurs du PGCD 53 ; comme 53 est premier, ce sont 1 et 53. (1)

Le point clé — On ne calcule jamais le produit des deux entiers pour obtenir le PPCM : on divise d'abord l'un d'eux par le PGCD.

Exercice 3 – Équations de divisibilité

(4 pts)

- a) $(n - 2)(n + 4) + 3 = n^2 + 4n - 2n - 8 + 3 = n^2 + 2n - 5$: l'égalité est vraie pour tout entier n . (1)
- b) $n - 2$ divise $(n - 2)(n + 4)$, donc il divise $n^2 + 2n - 5$ si et seulement s'il divise 3, d'où $n - 2 \in \{-3; -1; 1; 3\}$ et $n \in \{-1; 1; 3; 5\}$. (1)
- c) Si $3n + 1$ divise $n + 9$, il divise $3(n + 9) - (3n + 1) = 26$. Comme $3n + 1 \geq 1$ est un diviseur de 26, $3n + 1 \in \{1; 2; 13; 26\}$; seuls 1 et 13 sont de la forme $3n + 1$, d'où $n = 0$ ou $n = 4$. Réciproque : $1 \mid 9$ et $13 \mid 13$, les deux conviennent. (1)
- d) d divise toute combinaison linéaire de $n + 4$ et $n - 2$, en particulier $(n + 4) - (n - 2) = 6$. (1)

Repère — Une équation de divisibilité se ramène toujours à « un diviseur inconnu divise une constante », que l'on obtient par combinaison linéaire.

Exercice 4 – PGCD dépendant d'un entier*(4 pts)*

- a) Pour $n = 3$: $A = 11$ et $B = 33 = 11 \times 3$, donc $\text{pgcd} = 11$. Pour $n = 8$: $A = 21$ et $B = 68$; $68 = 3 \times 21 + 5$, $21 = 4 \times 5 + 1$, $5 = 5 \times 1$, donc $\text{pgcd} = 1$. (1)
- b) Si d divise A et B , il divise $7A - 2B = 14n + 35 - 14n - 24 = 11$. (1)
- c) 11 étant premier, $\text{pgcd}(A ; B)$ vaut 1 ou 11. Il vaut 11 si et seulement si 11 divise $A = 2n + 5$, c'est-à-dire si $2n + 5 = 11k$; en testant les restes de n par 11, cela équivaut à $n = 11m + 3$ (on vérifie alors $B = 77m + 33 = 11(7m + 3)$). (1)
- d) La fraction est irréductible si et seulement si le PGCD vaut 1, donc pour tous les entiers naturels n qui ne sont pas de la forme $11m + 3$. (1)

Attention — Prouver qu'un diviseur commun divise 11 ne prouve pas que le PGCD vaut 11 : il faut ensuite dire pour quels n cette valeur est atteinte.

Exercice 5 – Deux capteurs synchronisés*(4 pts)*

- a) $198 = 1 \times 132 + 66$ et $132 = 2 \times 66 + 0$, donc $\text{pgcd} = 66$; $\text{ppcm} = \frac{132 \times 198}{66} = 132 \times 3 = 396$. (1)
- b) Les instants de coïncidence sont les multiples communs, donc les multiples de 396 s : la première coïncidence a lieu au bout de 396 s, soit 6 min 36 s. Le capteur A a effectué $396 \div 132 = 3$ enregistrements et le capteur B $396 \div 198 = 2$. (1)
- c) Deux heures valent 7 200 s et $7\,200 = 396 \times 18 + 72$: il y a 18 coïncidences. (1)
- d) Il faut le PPCM des trois durées : $\text{ppcm}(396 ; 90) = \frac{396 \times 90}{18} = 1\,980$ car $\text{pgcd}(396 ; 90) = 18$. Les trois capteurs coïncident au bout de 1 980 s, soit 33 minutes. (1)

À retenir — Une coïncidence de cycles se lit avec le PPCM, un partage en parts identiques avec le PGCD.