Devoir surveillé – Arithmétique — congruences et applications

Congruences modulo n, critères de divisibilité et arithmétique modulaire (programme de Maths expertes Terminale)

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths expertes (option Tle) Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Restes et critères de divisibilité *(4 pts)*

a) a) Déterminer le reste de la division euclidienne de 3 428 par 9.

b) b) Déterminer le reste de la division euclidienne de 3 428 par 11.

c) c) Justifier, sans poser de division, que 3 428 n'est pas divisible par 99.

d) d) Déterminer le reste de $3\,428^2$ modulo 9.

Exercice 2 – Grandes puissances et divisibilité *(4 pts)*

a) a) Déterminer le reste de 2^{45} modulo 7.

b) b) Déterminer le reste de 3^{45} modulo 7.

c) c) En déduire que $2^{45} + 3^{45}$ est divisible par 7.

d) d) Le nombre $2^{45} + 3^{45}$ est-il divisible par 14 ? Justifier.

Exercice 3 – Équations de congruence *(4 pts)*

a) a) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $5x \equiv 4\ [9]$.

b) b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $10x \equiv 4\ [14]$.

c) c) Démontrer que l'équation $6x \equiv 4\ [9]$ n'admet aucune solution.

d) d) Déterminer tous les entiers relatifs n tels que $4n + 1$ soit divisible par 13.

Exercice 4 – Petit théorème de Fermat *(4 pts)*

a) a) Énoncer précisément le petit théorème de Fermat, hypothèses comprises.

b) b) Déterminer le reste de 4^{2022} modulo 19.

c) c) Démontrer que, pour tout entier n non divisible par 5, $n^8 \equiv 1\ [5]$.

d) d) Calculer le reste de 2^{14} modulo 15, puis en déduire que 15 n'est pas premier.

Exercice 5 – Application : chiffrement affine *(4 pts)*

a) Chaque lettre est repérée par son rang x (A $= 0$, …, Z $= 25$) et codée par la lettre de rang y tel que $y \equiv 5x + 8\ [26]$, avec $0 \leqslant y \leqslant 25$.
   a) Coder la lettre T.

b) b) Démontrer que 5 est inversible modulo 26 et déterminer son inverse.

c) c) Démontrer que le déchiffrement s'écrit $x \equiv 21y + 14\ [26]$.

d) d) Déchiffrer la lettre codée I.

Bon courage !