Lois à densité : uniforme et exponentielle

Fiche méthode

(Maths complémentaires Terminale · Probabilités · Lois à densité)

La démarche pour une question sur une loi à densité

1. Je nomme la loi et ses paramètres avec leur unité : densité donnée, loi uniforme sur $[a\,;b]$, ou loi exponentielle de paramètre λ.

2. Je traduis l'événement en $P(X \leqslant x)$, $P(X > x)$, $P(c \leqslant X \leqslant d)$ ou « sachant $X > t$ ».

3. Je calcule avec F (ou une intégrale), sans arrondir avant la fin.

4. Je conclus par une phrase dans le contexte, avec l'unité.

Le réflexe — Une probabilité est une aire : $P(X = a) = 0$, et la hauteur $f(t)$ n'est jamais une probabilité.

Cas 1 · Rappels : loi discrète et conditionnement

Réflexe — E(X) = Σ pᵢxᵢ ; V(X) = E(X²) − E(X)² ; événement inclus : P_A(B) = P(B)/P(A).

Exemple. Questions types : « Calculer $E(X)$, $V(X)$ », « Calculer $P_A(B)$ ». Exemple : X vaut 2, 4, 6 avec les probabilités 0,35 ; 0,4 ; 0,25.

$E(X) = 0{,}7 + 1{,}6 + 1{,}5 = 3{,}8$; $E(X^2) = 1{,}4 + 6{,}4 + 9 = 16{,}8$, donc $V(X) = 16{,}8 - 3{,}8^2 = 2{,}36$.

$\{X > 4\} \subset \{X > 2\}$: $P_{X>2}(X > 4) = \dfrac{0{,}25}{0{,}65} = \dfrac{5}{13} \approx 0{,}385$.

Attention — P_A(B) n'est pas P(A ∩ B) ; on retire E(X)² après avoir calculé E(X²).

Cas 2 · Densité : vérifier et calculer une aire

Réflexe — continue, positive, intégrale égale à 1 ; probabilité = intégrale entre les bornes.

Exemple. Questions types : « Déterminer k pour que f soit une densité », « Calculer $P(c \leqslant X \leqslant d)$ ». Exemple : $f(t) = k(t+1)$ sur $[0\,;2]$.

$\displaystyle\int_0^2 k(t+1)\,dt = k\left[\frac{t^2}{2} + t\right]_0^2 = 4k = 1$, donc $k = 0{,}25$ (f est alors positive).

$P(X \geqslant 1) = 0{,}25\left[\dfrac{t^2}{2} + t\right]_1^2 = 0{,}25 \times (4 - 1{,}5) = 0{,}625$.

Attention — f(t) peut dépasser 1 ; une intégrale égale à 1 ne suffit pas si f est négative quelque part.

Cas 3 · Fonction de répartition, espérance, variance

Réflexe — F primitive de f nulle au début ; E = ∫ t f(t) dt ; V = ∫ t² f(t) dt − E².

Exemple. Questions types : « Déterminer F », « Calculer la médiane, $E(X)$, $V(X)$ ». Exemple : $f(t) = 0{,}375t^2$ sur $[0\,;2]$.

$F(x) = \dfrac{x^3}{8}$ sur $[0\,;2]$; médiane : $\dfrac{m^3}{8} = 0{,}5$, $m = \sqrt[3]{4} \approx 1{,}587$.

$E(X) = \displaystyle\int_0^2 0{,}375t^3\,dt = \left[\frac{0{,}375t^4}{4}\right]_0^2 = 1{,}5$.

Attention — E(X) = ∫ t f(t) dt, pas ∫ f(t) dt, qui vaut toujours 1.

Cas 4 · Loi uniforme sur [a ; b]

Réflexe — probabilité = longueur favorable / (b − a) ; E = (a + b)/2 ; V = (b − a)²/12.

Exemple. Questions types : « Calculer $P(c \leqslant X \leqslant d)$, $E(X)$, $V(X)$ ». Exemple : X uniforme sur $[5\,;20]$.

$P(8 \leqslant X \leqslant 14) = \dfrac{14-8}{20-5} = \dfrac{6}{15} = 0{,}4.$

$E(X) = 12{,}5$ et $V(X) = \dfrac{15^2}{12} = 18{,}75.$

Attention — hors de [a ; b], la probabilité est nulle ; on coupe ce qui dépasse.

Cas 5 · Loi exponentielle : probabilités et paramètre

Réflexe — P(X > t) = e^(−λt) ; λ = 1/moyenne, ou λ = −ln(p)/t si P(X > t) = p.

Exemple. Questions types : « Déterminer λ », « Calculer $P(X \leqslant t)$, la durée moyenne, la médiane ». Exemple : $P(T > 4) = 0{,}7$, en années.

$e^{-4\lambda} = 0{,}7$, donc $\lambda = \dfrac{-\ln(0{,}7)}{4} \approx 0{,}0892$ par an.

Durée moyenne : $\dfrac{1}{\lambda} \approx 11{,}2$ ans.

Attention — E(X) = 1/λ, pas λ ; λ et t dans la même unité.

Cas 6 · Absence de mémoire

Réflexe — sachant X > t, loi exponentielle : je retire t ; démonstration par le quotient grâce à l'inclusion.

Exemple. Questions types : « Calculer $P_{X>t}(X > t+h)$ », « Démontrer la propriété », « Montrer qu'une loi n'est pas sans mémoire ». Exemple : $\lambda = 0{,}2$, $P_{X>3}(X > 7)$.

$\{X > 7\} \subset \{X > 3\}$, donc le quotient vaut $\dfrac{e^{-1{,}4}}{e^{-0{,}6}} = e^{-0{,}8}$.

$P_{X>3}(X > 7) = P(X > 4) = e^{-0{,}8} \approx 0{,}449.$

Attention — quotient, jamais différence ; pas d'absence de mémoire pour une loi uniforme.

Les pièges

- f(t) est une hauteur, pas une probabilité : seule l'aire sous la courbe en est une.
- P(X = a) = 0 : inégalités strictes ou larges donnent la même probabilité.
- e^(−λt) = P(X > t) (attendre encore) ; 1 − e^(−λt) = P(X ⩽ t) (déjà arrivé).
- E(X) = 1/λ pour la loi exponentielle, et (a + b)/2 (pas (b − a)/2) pour la loi uniforme.
- Le paramètre λ et la durée t doivent être dans la même unité : λt est sans unité.
- L'absence de mémoire ne vaut que pour la loi exponentielle ; ailleurs, on revient au quotient.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).