Lois à densité : uniforme et exponentielle

Fiche tableaux : les résultats à connaître
(Maths complémentaires Terminale)

Du discret au continu

	Variable discrète	**Variable à densité f**
Loi	tableau des $P(X = x_i)$	densité f, continue et positive
Total	$\sum p_i = 1$	$\int_I f(t)\,dt = 1$
$P(X = a)$	peut être non nulle	0
$P(c \leqslant X \leqslant d)$	somme des p_i	$\int_c^d f(t)\,dt$
$E(X)$	$\sum p_i x_i$	$\int_I t\,f(t)\,dt$
$V(X)$	$\sum p_i x_i^2 - E(X)^2$	$\int_I t^2 f(t)\,dt - E(X)^2$

Exemple : $f(t) = 0{,}5t$ sur $[0\,;2]$ a pour intégrale $\left[\dfrac{t^2}{4}\right]_0^2 = 1$: c'est une densité.

Fonction de répartition F

On cherche…	**Avec F**
$P(X \leqslant x)$	$F(x)$
$P(X > x)$	$1 - F(x)$
$P(c \leqslant X \leqslant d)$	$F(d) - F(c)$
la densité	$f = F'$
la médiane m	$F(m) = 0{,}5$

Exemple : $F(x) = \dfrac{x}{10}$ sur $[0\,;10]$: $P(2 \leqslant X \leqslant 7) = 0{,}7 - 0{,}2 = 0{,}5$.

Les deux lois du chapitre

	Uniforme sur $[a\,;b]$	**Exponentielle de paramètre λ**
Densité	$\dfrac{1}{b-a}$ sur $[a\,;b]$	$\lambda e^{-\lambda t}$ sur $[0\,;+\infty[$
$P(X \leqslant x)$	$\dfrac{x-a}{b-a}$	$1 - e^{-\lambda x}$
$P(X > x)$	$\dfrac{b-x}{b-a}$	$e^{-\lambda x}$
$P(c \leqslant X \leqslant d)$	$\dfrac{d-c}{b-a}$	$e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$
Espérance	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{1}{\lambda}$
Variance	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$	pas au programme
Médiane	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{\ln 2}{\lambda}$

Exemple : loi exponentielle de moyenne 30 : $\lambda = \dfrac{1}{30}$ et la médiane vaut $30 \ln 2 \approx 20{,}8$.

Trouver le paramètre λ

L'énoncé donne…	On écrit	On obtient
la durée moyenne μ	$\dfrac{1}{\lambda} = \mu$	$\lambda = \dfrac{1}{\mu}$
$P(X > t) = p$	$e^{-\lambda t} = p$	$\lambda = \dfrac{-\ln p}{t}$
$P(X \leqslant t) = p$	$e^{-\lambda t} = 1 - p$	$\lambda = \dfrac{-\ln(1-p)}{t}$
la demi-vie (médiane) T	$e^{-\lambda T} = 0{,}5$	$\lambda = \dfrac{\ln 2}{T}$

Exemple : $P(X \leqslant 10) = 0{,}4$ donne $\lambda = \dfrac{-\ln 0{,}6}{10} \approx 0{,}0511$.

Absence de mémoire et simulation

Notion	À retenir
Absence de mémoire	$P_{X>t}(X > t+h) = P(X > h) = e^{-\lambda h}$
Démonstration	inclusion, puis $\dfrac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h}$
Loi uniforme	pas sans mémoire : quotient $\dfrac{P(X>t+h)}{P(X>t)}$
`random()`	loi uniforme sur $[0\,;1]$
`a + (b - a)*random()`	loi uniforme sur $[a\,;b]$
`-log(1 - random())/lam`	loi exponentielle de paramètre `lam`

Exemple : $\lambda = 0{,}1$: $P_{X>12}(X > 17) = e^{-0{,}5} \approx 0{,}607$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).