

Devoir surveillé – Variables aléatoires à densité

Loi à densité, fonction de répartition et espérance — programme de Maths complémentaires Terminale

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths complémentaires (option Tle) Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Exercice 1 — Une navette d'aéroport (4 pts)

- a) a) Le temps d'attente X , en minutes, d'un voyageur pour une navette suit la loi uniforme sur $[5 ; 35]$. Donner la densité de X et calculer $P(X \leq 20)$.
 b) b) Calculer $P(10 \leq X \leq 22)$.
 c) c) Calculer le temps d'attente moyen.
 d) d) Calculer $P_{X \geq 15}(X \geq 30)$.

Exercice 2 – Exercice 2 — Loi exponentielle (4 pts)

- a) a) La durée X , en minutes, entre deux passages de voitures sur une route de campagne suit la loi exponentielle de paramètre 0,06. Calculer $P(X \leq 10)$, arrondie au millièm.
- b) b) Calculer $P(X > 35)$, arrondie au millièm.
- c) c) Calculer $P(10 \leq X \leq 35)$, arrondie au millièm.
- d) d) Calculer la durée moyenne entre deux passages, arrondie au dixième de minute.

Exercice 3 – Exercice 3 — Retrouver le paramètre (4 pts)

- a) a) La durée d'utilisation T , en semaines, d'un filtre à eau suit une loi exponentielle de paramètre λ . On sait que 75 % des filtres sont encore utilisables au bout de 10 semaines. Montrer que $\lambda = \frac{-\ln(0,75)}{10}$ et en donner une valeur approchée au dix-millièm.
- b) b) Calculer la durée d'utilisation moyenne d'un filtre, arrondie au dixième de semaine.
- c) c) Calculer la probabilité qu'un filtre soit hors d'usage avant 5 semaines, arrondie au millièm.
- d) d) Déterminer, à 0,1 semaine près, la durée au bout de laquelle la moitié des filtres sont hors d'usage. Comparer à la durée moyenne.

Exercice 4 – Exercice 4 — Sans vieillissement (4 pts)

- a) a) Le temps X , en heures, écoulé avant le prochain orage sur une station de mesure suit la loi exponentielle de paramètre 0,55. Calculer $P(X > 2)$, arrondie au millièm.
- b) b) Calculer $P_{X>3}(X > 5)$, arrondie au millièm.
- c) c) Démontrer l'égalité utilisée à la question b), c'est-à-dire que $P_{X>3}(X > 5) = P(X > 2)$.
- d) d) Un élève écrit : « $P_{X>3}(X > 5) = P(X > 5) - P(X > 3)$ ». Calculer le résultat que donnerait cette formule et expliquer pourquoi elle est fausse.

Exercice 5 – Exercice 5 — Une densité à étudier*(4 pts)*

- a) a) Soit c un réel et f la fonction définie par $f(t) = ct^2$ sur $[0 ; 3]$ et nulle ailleurs. Déterminer c pour que f soit une densité de probabilité.
- b) b) On note X la variable aléatoire de densité f . Déterminer l'expression de sa fonction de répartition F sur $[0 ; 3]$.
- c) c) Calculer $P(1 \leq X \leq 2)$ sous forme d'une fraction irréductible, puis une valeur approchée au millièème.
- d) d) Calculer $E(X)$.

Bon courage !