

Corrigé et barème – Variables aléatoires à densité

Loi à densité, fonction de répartition et espérance — programme de Maths complémentaires Terminale

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths complémentaires (option Tle) Terminale

Exercice 1 – Exercice 1 — Une navette d'aéroport

(4 pts)

- a) Densité constante $f(t) = \frac{1}{30}$ sur $[5; 35]$, nulle ailleurs ; $P(X \leq 20) = \frac{20-5}{30} = \frac{15}{30} = 0,5$. (1)
- b) $P(10 \leq X \leq 22) = \frac{22-10}{30} = \frac{12}{30} = 0,4$. (1)
- c) $E(X) = \frac{5+35}{2} = 20$ minutes. (1)
- d) $P(X \geq 30) = \frac{5}{30}$ et $P(X \geq 15) = \frac{20}{30}$, donc $P_{X \geq 15}(X \geq 30) = \frac{5/30}{20/30} = 0,25$. (1)

Repère — Avec une loi uniforme, toute probabilité est un rapport de longueurs : il faut toujours diviser par la longueur totale de l'intervalle, ici 30 et non 35.

Exercice 2 – Exercice 2 — Loi exponentielle

(4 pts)

- a) $P(X \leq 10) = 1 - e^{-0,06 \times 10} = 1 - e^{-0,6} \approx 1 - 0,549 = 0,451$. (1)
- b) $P(X > 35) = e^{-0,06 \times 35} = e^{-2,1} \approx 0,122$. (1)
- c) $P(10 \leq X \leq 35) = e^{-0,6} - e^{-2,1} \approx 0,549 - 0,122 = 0,426$ (on peut aussi écrire $1 - 0,451 - 0,122$). (1)
- d) $E(X) = \frac{1}{0,06} \approx 16,7$ minutes. (1)

Erreur fréquente — Confondre $e^{-\lambda t}$, probabilité d'attendre encore, et $1 - e^{-\lambda t}$, probabilité que l'événement soit déjà survenu : une phrase de conclusion permet de contrôler le sens du résultat.

Exercice 3 – Exercice 3 — Retrouver le paramètre

(4 pts)

- a) $P(T > 10) = 0,75$ s'écrit $e^{-10\lambda} = 0,75$; en composant par $\ln$ (strictement croissante) : $-10\lambda = \ln(0,75)$, donc $\lambda = \frac{-\ln(0,75)}{10} \approx 0,0288$ semaine⁻¹. (1)
- b) $E(T) = \frac{1}{\lambda} \approx \frac{1}{0,0288} \approx 34,8$ semaines. (1)
- c) $P(T \leq 5) = 1 - e^{-5\lambda} = 1 - e^{-0,1438} \approx 1 - 0,866 = 0,134$. (1)
- d) On résout $1 - e^{-\lambda t} = 0,5$, soit $t = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0,6931}{0,0288} \approx 24,1$ semaines : la médiane est nettement inférieure à la moyenne (34,8 semaines), car quelques filtres durent très longtemps. (1)

Le point clé — Une information du type « p % fonctionnent encore au bout de t » se traduit toujours par $e^{-\lambda t} = p$, puis se résout avec le logarithme népérien.

Exercice 4 – Exercice 4 — Sans vieillissement

(4 pts)

- a) $P(X > 2) = e^{-0,55 \times 2} = e^{-1,1} \approx 0,333$. (1)
- b) La loi est exponentielle, donc sans vieillissement : $P_{X>3}(X > 5) = P(X > 5 - 3) = P(X > 2) \approx 0,333$. (1)
- c) $(X > 5) \subset (X > 3)$, donc $P_{X>3}(X > 5) = \frac{P(X>5)}{P(X>3)} = \frac{e^{-2,75}}{e^{-1,65}} = e^{-2,75+1,65} = e^{-1,1} = P(X > 2)$. (1)
- d) La formule donnerait $e^{-2,75} - e^{-1,65} \approx 0,064 - 0,192 = -0,128$, un nombre négatif : c'est impossible pour une probabilité. L'élève a soustrait au lieu de diviser ; la définition est $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$. (1)

Attention — Un résultat négatif ou supérieur à 1 signale une formule fautive : une probabilité conditionnelle est un quotient, jamais une différence.

Exercice 5 – Exercice 5 — Une densité à étudier*(4 pts)*

- a) $\int_0^3 ct^2 dt = c \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^3 = 9c$; cette intégrale doit valoir 1, donc $c = \frac{1}{9}$ (f est alors bien positive sur $[0 ; 3]$).
(1)
- b) Pour $x \in [0 ; 3]$, $F(x) = \int_0^x \frac{t^2}{9} dt = \frac{x^3}{27}$; on vérifie $F(0) = 0$ et $F(3) = 1$. (1)
- c) $P(1 \leq X \leq 2) = F(2) - F(1) = \frac{8}{27} - \frac{1}{27} = \frac{7}{27} \approx 0,259$. (1)
- d) $E(X) = \int_0^3 t \times \frac{t^2}{9} dt = \frac{1}{9} \left[\frac{t^4}{4} \right]_0^3 = \frac{81}{36} = 2,25$. (1)

À retenir — Deux contrôles suffisent à valider une fonction de répartition obtenue par intégration : elle doit valoir 0 au début de l'intervalle et 1 à la fin.