Suites et modèles discrets

Fiche méthode

(Maths complémentaires Terminale · Analyse · Suites)

La démarche pour étudier un modèle discret

1. Je traduis l'énoncé : premier terme u_0 et relation entre u_{n+1} et u_n ; je contrôle avec u_1.

2. Je reconnais le type : forme explicite, suite arithmétique, géométrique, arithmético-géométrique, ou $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. J'étudie la suite : suite constante solution, forme explicite, sens de variation (signe de $u_{n+1} - u_n$).

4. J'exploite le modèle : seuil encadré par deux rangs consécutifs, stabilisation autour de la valeur d'équilibre, interprétation avec les unités de l'énoncé.

Le réflexe — chaque conclusion s'appuie sur un calcul valable pour tout n (différence, forme explicite) ; quelques termes calculés ne servent qu'à conjecturer.

Cas 1 · Étudier le sens de variation (rappel)

Réflexe — je calcule $u_{n+1} - u_n$, je l'étudie pour n entier et je précise le rang à partir duquel le signe est valable.

Exemple. Questions types : « Étudier le sens de variation de (u_n) ». Exemple : $v_n = n^3 - 6n$.

$v_{n+1} - v_n = (n+1)^3 - 6(n+1) - n^3 + 6n = 3n^2 + 3n - 5$.

Pour $n = 0$, cette différence vaut -5 : $v_1 < v_0$. Pour $n \geqslant 1$, $3n^2 + 3n - 5 \geqslant 3 + 3 - 5 = 1 > 0$.

(v_n) est strictement croissante à partir du rang 1.

Attention — $u_{n+1} \neq u_n + 1$; la méthode du quotient exige des termes strictement positifs.

Cas 2 · Traduire un énoncé en relation de récurrence

Réflexe — un pourcentage devient un coefficient multiplicateur, une quantité fixe une addition, dans l'ordre de l'énoncé.

Exemple. Questions types : « Justifier que $u_{n+1} = \ldots$ ». Exemple : un bassin contient 250 m³ d'eau ; chaque semaine, 3 % de l'eau s'évapore, puis on ajoute 9 m³.

Il reste 97 % de l'eau, soit $0{,}97\,u_n$, puis on ajoute 9 m³.

Donc $u_0 = 250$ et $u_{n+1} = 0{,}97\,u_n + 9$.

Contrôle : $u_1 = 0{,}97 \times 250 + 9 = 251{,}5$ m³.

Attention — « ajouter puis retirer un pourcentage » ne donne pas la même relation que l'ordre inverse.

Cas 3 · Suite constante solution et forme explicite

Réflexe — $c = ac + b$; $v_n = u_n - c$ géométrique de raison a ; $u_n = c + (u_0 - c)a^n$.

Exemple. Questions types : « Déterminer la suite constante solution », « Montrer que (v_n) est géométrique », « Exprimer u_n ». Exemple : $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 0{,}2\,u_n + 12$.

$c = 0{,}2c + 12 \iff 0{,}8c = 12 \iff c = 15$.

$v_n = u_n - 15$: $v_{n+1} = 0{,}2\,u_n + 12 - 15 = 0{,}2(u_n - 15) = 0{,}2\,v_n$, géométrique de raison 0,2, $v_0 = -10$.

Donc $u_n = 15 - 10 \times 0{,}2^n$; contrôle : $u_1 = 15 - 2 = 13$.

Attention — $v_n = u_n - c$ (pas $u_n + c$) ; (u_n) elle-même n'est pas géométrique.

Cas 4 · Sens de variation, seuil, stabilisation

Réflexe — $u_{n+1} - u_n = (u_0 - c)a^n(a-1)$; seuil : deux rangs consécutifs + monotonie.

Exemple. Questions types : « Étudier le sens de variation », « À partir de quel rang a-t-on $u_n > \ldots$? ». Suite du cas 3 : $u_n = 15 - 10 \times 0{,}2^n$, seuil 14,99.

$u_{n+1} - u_n = 10 \times 0{,}2^n \times (1 - 0{,}2) = 8 \times 0{,}2^n > 0$: (u_n) est strictement croissante.

$u_4 = 14{,}984 \leqslant 14{,}99$ et $u_5 = 14{,}9968 > 14{,}99$: le premier rang est 5, et les suivants conviennent aussi (suite croissante).

Le modèle se stabilise autour de 15 sans l'atteindre.

Attention — une boucle « tant que u ≤ S » ne s'arrête jamais si S est au-delà de la valeur d'équilibre.

Cas 5 · Représenter $u_{n+1} = f(u_n)$

Réflexe — courbe de f + droite y = x ; escalier ou spirale ; f(x) = x donne la valeur d'équilibre.

Exemple. Questions types : « Construire les premiers termes », « Conjecturer le comportement ». Exemple : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 6}$.

$u_1 = \sqrt{11} \approx 3{,}317$, $u_2 \approx 4{,}752$: l'escalier monte.

$f(x) = x \iff x^2 = 5x + 6$ avec $x \geqslant 0$, soit $x = 6$ (-1 est exclu).

Conjecture : la suite est croissante et ses termes se rapprochent de 6.

Attention — f croissante ne prouve pas que la suite est croissante : on étudie le signe de $f(u_n) - u_n$.

Les pièges

- u_{n+1} désigne le terme suivant ; $u_n + 1$ ajoute 1 au terme.
- « Perdre 15 % puis ajouter 120 » et « ajouter 120 puis perdre 15 % » ne donnent pas la même relation.
- La suite auxiliaire est $u_n - c$, pas $u_n + c$; et (u_n) n'est pas géométrique.
- f croissante ne donne pas une suite croissante : seul le signe de $f(u_n) - u_n$ décide.
- Un seuil se vérifie sur deux rangs consécutifs, avec la monotonie de la suite.
- Un nuage de points ne se relie pas : la suite n'existe que pour des entiers.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).