Primitives

Fiche méthode

(Maths complémentaires Terminale · Analyse · Primitives)

La démarche pour trouver une primitive

1. Je lis l'intervalle et je vérifie que la fonction y est continue (dénominateur non nul, racine ou logarithme définis).

2. Je reconnais la forme : somme de fonctions du tableau, fonction de $ax+b$, ou forme composée $2u'u$, $u'e^u$, $\dfrac{u'}{u}$.

3. J'écris la primitive en ajustant les coefficients constants, avec $+k$ si l'on demande toutes les primitives ou une condition initiale.

4. Je vérifie en dérivant : je dois retrouver exactement f.

Le réflexe — une primitive se contrôle toujours en la dérivant : cette vérification prend quelques secondes et évite de perdre les points de toute la suite.

Cas 1 · Montrer que F est une primitive de f

Réflexe — je dérive F (produit, quotient, composée) et je retrouve f ; je ne dérive jamais f.

Exemple. Questions types : « Montrer que F est une primitive de f sur I », « Résoudre $y'=f$ ». Exemple : $F(x)=(x-1)e^{2x}$ et $f(x)=(2x-1)e^{2x}$ sur $\mathbb{R}$.

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables, avec $u(x)=x-1$ et $v(x)=e^{2x}$, $v'(x)=2e^{2x}$.
$F'(x)=e^{2x}+2(x-1)e^{2x}=(2x-1)e^{2x}=f(x)$.
Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, et les primitives de f sont les $x\mapsto(x-1)e^{2x}+k$.

Attention — F′ = f, pas f′ = F ; et « toutes les primitives » demande le + k.

Cas 2 · Somme de fonctions usuelles

Réflexe — je sors les coefficients, je primitive terme à terme avec le tableau, je précise l'intervalle.

Exemple. Questions types : « Déterminer une primitive de f sur I ». Exemple : $f(x)=6x^2-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ sur $]0\,;+\infty[$.

$6x^2=6\times x^2$ donne $6\times\dfrac{x^3}{3}=2x^3$; $\dfrac{3}{x}=3\times\dfrac{1}{x}$ donne $3\ln x$; $\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ donne $2\times 2\sqrt{x}=4\sqrt{x}$.
Une primitive est $F(x)=2x^3-3\ln x+4\sqrt{x}$.
Vérification : $F'(x)=6x^2-\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{2\sqrt{x}}=f(x)$.

Attention — pas de règle pour un produit ou un quotient : développer ou simplifier d'abord.

Cas 3 · Forme composée

Réflexe — je repère u, je calcule u′, je compare au facteur présent et j'ajuste la constante ; pour ln u, je justifie $u>0$.

Exemple. Questions types : « Déterminer une primitive en précisant la fonction u ». Exemple : $f(x)=\dfrac{3x^2+1}{x^3+x+2}$ sur $[0\,;+\infty[$.

On pose $u(x)=x^3+x+2$: pour $x\geqslant 0$, $u(x)\geqslant 2>0$.
$u'(x)=3x^2+1$, donc $f=\dfrac{u'}{u}$.
Une primitive est $F(x)=\ln(x^3+x+2)$ sur $[0\,;+\infty[$.

Attention — on n'ajuste qu'un nombre, jamais un facteur en x ; ln u exige $u > 0$.

Cas 4 · Condition initiale

Réflexe — forme générale $F_0 + k$, je remplace x par x_0, je résous en k, je conclus par l'expression complète.

Exemple. Questions types : « Déterminer la primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$ ». Exemple : $f(x) = 2e^{2x} + 1$ sur $\mathbb{R}$, avec $F(0) = 3$.

Les primitives de f sont les $x \mapsto e^{2x} + x + k$.
$F(0) = e^0 + 0 + k = 1 + k$; $1 + k = 3$ donne $k = 2$.
Conclusion : $F(x) = e^{2x} + x + 2$.

Attention — $F(0) \neq k$ dès qu'une exponentielle apparaît ($e^0 = 1$).

Cas 5 · Grandeur et taux de variation

Réflexe — marginal, vitesse, débit = dérivée ; la grandeur est la primitive fixée par sa valeur initiale ; une variation se calcule par Q(b) − Q(a).

Exemple. Questions types : « Exprimer la position (le coût total, le volume) », « Calculer ce qui s'ajoute entre a et b ». Exemple : vitesse $v(t) = 3t^2 + 2$ (m/s), position initiale $x(0) = 1$.

$x' = v$, donc $x(t) = t^3 + 2t + k$, et $x(0) = k = 1$: $x(t) = t^3 + 2t + 1$.
Distance parcourue entre $t = 1$ et $t = 2$ (la vitesse est positive) : $x(2) - x(1) = 13 - 4 = 9$ m.

Attention — les coûts fixes ne sont pas nuls ; Q(b) − Q(a) n'est pas Q(b).

Les pièges

- Oublier le + k quand on demande toutes les primitives, ou une condition initiale.
- Écrire e^{ax+b} au lieu de $(1/a)e^{ax+b}$: en dérivant, le facteur a sortirait.
- Écrire ln u sans vérifier que $u > 0$ sur l'intervalle ; sur $]-\infty\,;\,0[$, une primitive de $1/x$ est $\ln(-x)$.
- Inventer une règle du produit : une primitive de f × g n'est pas F × G.
- Oublier l'intervalle : $1/x^2$ n'a pas de primitive sur $\mathbb{R}$, mais en a sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur $]-\infty\,;\,0[$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).