Devoir surveillé – Primitives

Primitive d'une fonction et équation $y' = f$, primitives des fonctions usuelles et linéarité, formes $2u'u$, $u'e^u$ et u'/u, primitive vérifiant une condition initiale, coût total, position et quantité à partir de leur taux de variation.

Durée : 120 min – Calculatrice autorisée – Sur 20 points · Maths complémentaires (option Tle) Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Primitives de fonctions usuelles ★★ *(4 pts)*

Déterminer une primitive de chaque fonction sur l'intervalle indiqué, puis vérifier en dérivant.

a) $f(x) = 9x^2 - 4x + 7$ sur $\mathbb{R}$

b) $g(x) = \dfrac{7}{x} - \dfrac{2}{x^2}$ sur $]0\,;+\infty[$

c) $h(x) = e^{-3x+2}$ sur $\mathbb{R}$

d) $k(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x}}$ sur $]0\,;+\infty[$

Exercice 2 – Formes composées ★★ *(4 pts)*

Déterminer une primitive de chaque fonction sur l'intervalle indiqué, en précisant la forme reconnue et la fonction u.

a) $f(x) = (10x - 4)e^{5x^2 - 4x}$ sur $\mathbb{R}$

b) $g(x) = \dfrac{x^2}{x^3 + 7}$ sur $[0\,;+\infty[$, après avoir justifié le signe du dénominateur

c) $h(x) = (6x + 9)(x^2 + 3x - 2)$ sur $\mathbb{R}$

d) $k(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^{2x} + 6}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 3 – Condition initiale et vérification ★★ *(4 pts)*

Les questions a), b) d'une part, c), d) d'autre part sont indépendantes.

a) Déterminer la primitive F de $f(x) = 4x^3 + 6x$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(-1) = 0$.

b) Déterminer la primitive G de $g(x) = \dfrac{1}{x} + 2x$ sur $]0\,;+\infty[$ telle que $G(1) = 7$.

c) Montrer que $H(x) = (3x - 5)e^{2x}$ est une primitive de $h(x) = (6x - 7)e^{2x}$ sur $\mathbb{R}$.

d) En déduire la primitive de h sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

Exercice 4 – Vrai ou faux ? Justifier ★★★ *(4 pts)*

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

a) « La fonction $F(x) = x^2 \ln x$ est une primitive de $f(x) = 2x \ln x$ sur $]0\,;+\infty[$. »

b) « Si F est une primitive de f et G une primitive de g sur $\mathbb{R}$, alors $F \times G$ est une primitive de $f \times g$. »

c) « La fonction $x \mapsto \ln(x^2 + 2x + 2)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2}$. »

d) « Il existe une primitive de $x \mapsto 3x^2$ sur $\mathbb{R}$ dont la courbe passe par les points $A(0\,;1)$ et $B(1\,;3)$. »

Exercice 5 – Remplissage d'un réservoir ★★★ *(4 pts)*

Un réservoir initialement vide se remplit pendant 30 minutes. Le débit d'eau, en litres par minute, est modélisé pour $t \in [0\,;30]$ par $r(t) = \dfrac{20t}{t^2+4}$, où t est le temps écoulé en minutes. On note $V(t)$ le volume d'eau dans le réservoir à l'instant t, en litres, avec $V(0) = 0$.

a) Justifier que V est une primitive de r, puis montrer que $V(t) = 10\ln\left(\dfrac{t^2+4}{4}\right)$.

b) Calculer le volume d'eau dans le réservoir au bout de 10 minutes, arrondi au dixième de litre.

c) Calculer le volume d'eau ajouté entre la dixième et la vingtième minute, arrondi au dixième de litre.

d) Montrer que le débit est maximal à l'instant $t = 2$ et préciser sa valeur.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).