Corrigé et barème – Primitives

Primitive d'une fonction et équation y′ = f, primitives des fonctions usuelles et linéarité, formes 2u′u, u′e^u et u′/u, primitive vérifiant une condition initiale, coût total, position et quantité à partir de leur taux de variation.

Durée : 120 min – Calculatrice autorisée – Sur 20 points · Maths complémentaires (option Tle) Terminale

Exercice 1 – Primitives de fonctions usuelles ★★ *(4 pts)*

a) Par linéarité, $9x^2$ donne $9 \times \dfrac{x^3}{3} = 3x^3$, $-4x$ donne $-4 \times \dfrac{x^2}{2} = -2x^2$ et 7 donne $7x$. Une primitive est $F(x) = 3x^3 - 2x^2 + 7x$. Vérification : $F'(x) = 9x^2 - 4x + 7 = f(x)$. (1)

b) Sur $]0\,;+\infty[$, une primitive de $\dfrac{1}{x}$ est $\ln x$ et une primitive de $\dfrac{1}{x^2}$ est $-\dfrac{1}{x}$. Par linéarité, $G(x) = 7\ln x - 2 \times \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 7\ln x + \dfrac{2}{x}$. Vérification : $G'(x) = \dfrac{7}{x} - \dfrac{2}{x^2} = g(x)$. (1)

c) Forme e^{ax+b} avec $a = -3$ et $b = 2$: une primitive est $H(x) = -\dfrac{1}{3}e^{-3x+2}$. Vérification : $H'(x) = -\dfrac{1}{3} \times (-3)e^{-3x+2} = e^{-3x+2}$. (1)

d) Une primitive de $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est $2\sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$, donc $K(x) = 3 \times 2\sqrt{x} = 6\sqrt{x}$. Vérification : $K'(x) = 6 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3}{\sqrt{x}}$. (1)

Repère — On sort les coefficients, on primitive terme à terme, et la dérivée du résultat doit redonner la fonction de départ.

Exercice 2 – Formes composées ★★ *(4 pts)*

a) On pose $u(x) = 5x^2 - 4x$, dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $u'(x) = 10x - 4$. Donc $f = u'e^u$ et une primitive est $F(x) = e^{5x^2-4x}$. (1)

b) Pour $x \geqslant 0$, $x^3 \geqslant 0$ donc $x^3 + 7 \geqslant 7 > 0$. Avec $u(x) = x^3 + 7$, $u'(x) = 3x^2$, donc $x^2 = \dfrac{1}{3}u'(x)$ et $g = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{u'}{u}$. Comme $u > 0$ sur $[0\,;+\infty[$, une primitive est $G(x) = \dfrac{1}{3}\ln(x^3 + 7)$. (1)

c) On pose $u(x) = x^2 + 3x - 2$: $u'(x) = 2x + 3$ et $6x + 9 = 3u'(x)$. Donc $h = 3u'u = \dfrac{3}{2} \times 2u'u$, et une primitive de $2u'u$ est u^2 : $H(x) = \dfrac{3}{2}(x^2 + 3x - 2)^2$. Vérification : $H'(x) = \dfrac{3}{2} \times 2(2x + 3)(x^2 + 3x - 2) = (6x + 9)(x^2 + 3x - 2)$. (1)

d) On pose $u(x) = e^{2x} + 6$: $u(x) > 6 > 0$ pour tout réel x, et $u'(x) = 2e^{2x}$. Donc $k = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{u'}{u}$ et une primitive est $K(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(e^{2x} + 6\right)$. (1)

Repère — On compare u′ au facteur présent : on n'ajuste qu'une constante, et ln u exige u > 0.

Exercice 3 – Condition initiale et vérification ★★ *(4 pts)*

a) Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto x^4 + 3x^2 + k$. $F(-1) = 1 + 3 + k = 4 + k$, et $F(-1) = 0$ donne $k = -4$. Conclusion : $F(x) = x^4 + 3x^2 - 4$. (1)

b) Sur $]0\,;+\infty[$, les primitives de g sont les fonctions $x \mapsto \ln x + x^2 + k$. $G(1) = 0 + 1 + k = 1 + k$, et $G(1) = 7$ donne $k = 6$. Conclusion : $G(x) = \ln x + x^2 + 6$. (1)

c) H est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables, avec $u(x) = 3x - 5$, $u'(x) = 3$, $v(x) = e^{2x}$, $v'(x) = 2e^{2x}$. Pour tout réel x : $H'(x) = 3e^{2x} + 2(3x - 5)e^{2x} = (3 + 6x - 10)e^{2x} = (6x - 7)e^{2x} = h(x)$. Donc H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$. (1)

d) Les primitives de h sur l'intervalle $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto (3x - 5)e^{2x} + k$. En 0 : $(0 - 5)e^0 + k = -5 + k$, et $-5 + k = 0$ donne $k = 5$. La primitive cherchée est $x \mapsto (3x - 5)e^{2x} + 5$. (1)

Repère — On écrit la forme générale avec + k avant de remplacer x : la condition fixe une seule constante.

Exercice 4 – Vrai ou faux ? Justifier ★★★ *(4 pts)*

a) **Faux.** F est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme produit, et $F'(x) = 2x\ln x + x^2 \times \dfrac{1}{x} = 2x\ln x + x$. Donc $F'(x) = f(x) + x \neq f(x)$ pour tout $x > 0$: par exemple $F'(1) = 1$ alors que $f(1) = 0$. (1)

b) **Faux.** Contre-exemple : $f(x) = g(x) = 1$, avec $F(x) = G(x) = x$. Alors $F \times G = x^2$, dont la dérivée est $2x$, alors que $f \times g = 1$. Il n'existe pas de règle du produit pour les primitives. (1)

c) **Vrai.** Pour tout réel x, $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 \geqslant 1 > 0$, donc $\ln(x^2 + 2x + 2)$ est défini et dérivable sur $\mathbb{R}$. Avec $u(x) = x^2 + 2x + 2$, $u'(x) = 2x + 2$, et la dérivée de $\ln u$ est $\dfrac{u'}{u} = \dfrac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2}$. (1)

d) **Faux.** Les primitives de $x \mapsto 3x^2$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $F : x \mapsto x^3 + k$. La courbe passe par A si $F(0) = k = 1$: c'est la seule primitive possible, $F(x) = x^3 + 1$. Mais alors $F(1) = 2 \neq 3$: sa courbe ne passe pas par B. Aucune primitive ne convient. (1)

Repère — Pour prouver qu'une affirmation est fausse, un seul contre-exemple suffit ; pour prouver qu'une primitive est juste, on dérive.

Exercice 5 – Remplissage d'un réservoir ★★★ *(4 pts)*

a) Le débit est la vitesse de variation du volume : $V' = r$ sur $[0\,;30]$, donc V est la primitive de r qui s'annule en 0. Avec $u(t) = t^2 + 4 > 0$ et $u'(t) = 2t$: $r = 10 \times \dfrac{u'}{u}$, donc $V(t) = 10\ln(t^2 + 4) + k$. $V(0) = 10\ln 4 + k = 0$ donne $k = -10\ln 4$, soit $V(t) = 10\ln(t^2 + 4) - 10\ln 4 = 10\ln\left(\dfrac{t^2 + 4}{4}\right)$. (1)

b) $V(10) = 10\ln\left(\dfrac{104}{4}\right) = 10\ln 26 \approx 32{,}6$ litres. (1)

c) Le volume ajouté entre $t = 10$ et $t = 20$ est $V(20) - V(10) = 10\ln\left(\dfrac{404}{4}\right) - 10\ln 26 = 10\ln 101 - 10\ln 26 = 10\ln\left(\dfrac{101}{26}\right) \approx 13{,}6$ litres. (1)

d) r est dérivable sur $[0\,;30]$ comme quotient : $r'(t) = \dfrac{20(t^2+4) - 20t \times 2t}{(t^2+4)^2} = \dfrac{20(4 - t^2)}{(t^2+4)^2}$. Sur $[0\,;30]$, $4 - t^2 = (2 - t)(2 + t)$ est du signe de $2 - t$: $r' \geqslant 0$ sur $[0\,;2]$ et $r' \leqslant 0$ sur $[2\,;30]$. Donc r est maximal en $t = 2$, avec $r(2) = \dfrac{40}{8} = 5$ litres par minute. (1)

Repère — Débit → volume : le volume est la primitive du débit fixée par le volume initial ; ce qui s'ajoute entre a et b vaut V(b) − V(a).

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).