

Devoir surveillé – Primitives et intégration

Primitives des fonctions usuelles et premières propriétés de l'intégrale (programme de Terminale — option Maths complémentaires)

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths complémentaires (option Tle) Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Primitives de fonctions usuelles

(4 pts)

- a) a) Déterminer une primitive de $f(x) = 9x^2 - 4x + 7$ sur $\mathbb{R}$. c) c) Déterminer une primitive de $h(x) = e^{-3x+2}$ sur $\mathbb{R}$.
- b) b) Déterminer une primitive de $g(x) = \frac{5}{x} - \frac{2}{x^2}$ sur $]0; +\infty[$. d) d) Déterminer une primitive de $k(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 2 – Formes composées

(4 pts)

- a) a) Déterminer une primitive de $f(x) = (10x - 4)e^{5x^2-4x}$ sur $\mathbb{R}$.
- b) b) Déterminer une primitive de $g(x) = \frac{x^2}{x^3 + 7}$ sur $]0; +\infty[$, après avoir justifié le signe du dénominateur.
- c) c) Déterminer une primitive de $h(x) = (6x + 9)(x^2 + 3x - 2)^4$ sur $\mathbb{R}$.
- d) d) Déterminer une primitive de $k(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 6}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 – Condition initiale et vérification

(4 pts)

- a) a) Déterminer la primitive F de $f(x) = 4x^3 + 6x$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(-1) = 0$.
- b) b) Déterminer la primitive G de $g(x) = \frac{1}{x} + 2x$ sur $]0; +\infty[$ telle que $G(1) = 7$.
- c) c) Montrer que $H(x) = (3x - 5)e^{2x}$ est une primitive de $h(x) = (6x - 7)e^{2x}$ sur $\mathbb{R}$.
- d) d) En déduire la primitive de h sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

Exercice 4 – Calculs d'intégrales

(4 pts)

- a) a) Calculer $\int_0^3 (x^2 - 2x) dx$.
- b) b) Calculer $\int_1^{e^2} \frac{4}{x} dx$.
- c) c) Calculer $\int_0^2 (2x + 1)e^{x^2+x} dx$; donner la valeur exacte.
- d) d) Un élève écrit : « puisque le résultat de la question a) est nul, la fonction $x \mapsto x^2 - 2x$ est nulle sur $[0; 3]$ ». Expliquer son erreur.

Exercice 5 – Remplissage d'un réservoir*(4 pts)*

- a) Un réservoir initialement vide se remplit pendant 30 minutes. Le débit d'eau, en litres par minute, est modélisé pour $t \in [0 ; 30]$ par $r(t) = \frac{20t}{t^2 + 4}$, où t est le temps écoulé en minutes. On note $V(t)$ le volume d'eau présent dans le réservoir à l'instant t , en litres, avec $V(0) = 0$.
- a) Déterminer l'expression de $V(t)$.
- b) Calculer le volume d'eau contenu dans le réservoir au bout de 10 minutes, arrondi au dixième de litre.
- c) Écrire à l'aide d'une intégrale le volume d'eau ajouté entre la dixième et la vingtième minute, puis le calculer au dixième de litre.
- d) Montrer que le débit est maximal à l'instant $t = 2$ et préciser sa valeur.

Bon courage !