

Corrigé et barème – Primitives et intégration

Primitives des fonctions usuelles et premières propriétés de l'intégrale (programme de Terminale — option Maths complémentaires)

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths complémentaires (option Tle) Terminale

Exercice 1 – Primitives de fonctions usuelles

(4 pts)

- a) $F(x) = 3x^3 - 2x^2 + 7x$ (vérification : $F'(x) = 9x^2 - 4x + 7$). (1)
- b) $G(x) = 5 \ln x + \frac{2}{x}$, car une primitive de $\frac{1}{x^2}$ est $-\frac{1}{x}$. (1)
- c) $H(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x+2}$, avec $a = -3$ dans la formule $e^{ax+b} \rightarrow \frac{1}{a}e^{ax+b}$. (1)
- d) $K(x) = 6\sqrt{x}$, car une primitive de $\frac{1}{\sqrt{x}}$ est $2\sqrt{x}$. (1)

Erreur fréquente — Le signe du coefficient a dans e^{ax+b} se retrouve au dénominateur de la primitive : oublier le $\frac{1}{a}$ coûte la question entière.

Exercice 2 – Formes composées

(4 pts)

- a) $u(x) = 5x^2 - 4x$, $u'(x) = 10x - 4$: $f = u'e^u$, donc $F(x) = e^{5x^2-4x}$. (1)
- b) Pour $x \geq 0$, $x^3 + 7 \geq 7 > 0$; avec $u(x) = x^3 + 7$, $u'(x) = 3x^2$, on a $g = \frac{1}{3} \times \frac{u'}{u}$ et $G(x) = \frac{1}{3} \ln(x^3 + 7)$. (1)
- c) $u(x) = x^2 + 3x - 2$, $u'(x) = 2x + 3$ et $6x + 9 = 3u'(x)$: $h = 3u'u^4$, donc $H(x) = \frac{3(x^2+3x-2)^5}{5}$. (1)
- d) $u(x) = e^{2x} + 6 > 0$, $u'(x) = 2e^{2x}$: $k = \frac{1}{2} \times \frac{u'}{u}$, donc $K(x) = \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 6)$. (1)

Le point clé — On identifie u , on calcule u' , puis on ajuste le coefficient : c'est ce rapport entre u' et le facteur présent qui fait toute la différence.

Exercice 3 – Condition initiale et vérification

(4 pts)

- a) Les primitives sont $x^4 + 3x^2 + k$; $F(-1) = 1 + 3 + k = 4 + k = 0$ donne $k = -4$, donc $F(x) = x^4 + 3x^2 - 4$. (1)
- b) Les primitives sont $\ln x + x^2 + k$; $G(1) = 0 + 1 + k = 7$ donne $k = 6$, donc $G(x) = \ln x + x^2 + 6$. (1)
- c) $H'(x) = 3e^{2x} + 2(3x - 5)e^{2x} = (3 + 6x - 10)e^{2x} = (6x - 7)e^{2x} = h(x)$: H est bien une primitive de h . (1)
- d) Les primitives de h sont $(3x - 5)e^{2x} + k$; en 0 : $-5 + k = 0$, donc $k = 5$ et la primitive cherchée est $(3x - 5)e^{2x} + 5$. (1)

À retenir — On écrit toujours la forme générale avec le $+k$ avant de remplacer x par la valeur imposée.

Exercice 4 – Calculs d'intégrales

(4 pts)

- a) Une primitive est $\frac{x^3}{3} - x^2$; l'intégrale vaut $(9 - 9) - (0 - 0) = 0$. (1)
- b) Une primitive de $\frac{4}{x}$ est $4 \ln x$; l'intégrale vaut $4 \ln(e^2) - 4 \ln 1 = 8$. (1)
- c) $u(x) = x^2 + x$, $u'(x) = 2x + 1$: une primitive est e^{x^2+x} , et l'intégrale vaut $e^6 - e^0 = e^6 - 1$. (1)
- d) L'intégrale vaut $F(3) - F(0)$: elle est nulle dès que la primitive prend la même valeur aux deux bornes, sans que la fonction le soit. Ici $f(1) = 1 - 2 = -1 \neq 0$, donc la fonction n'est pas nulle. (1)

Attention — Une intégrale nulle ne signifie jamais que la fonction intégrée est nulle : elle signifie seulement que la primitive reprend la même valeur.

Exercice 5 – Remplissage d'un réservoir*(4 pts)*

- a) Avec $u(t) = t^2 + 4 > 0$ et $u'(t) = 2t$, on a $r = 10 \times \frac{u'}{u}$, donc $V(t) = 10 \ln(t^2 + 4) + k$; $V(0) = 10 \ln 4 + k = 0$ donne $k = -10 \ln 4$, soit $V(t) = 10 \ln\left(\frac{t^2+4}{4}\right)$. (1)
- b) $V(10) = 10 \ln\left(\frac{104}{4}\right) = 10 \ln 26 \approx 32,6$ litres. (1)
- c) Volume ajouté $= \int_{10}^{20} r(t) dt = V(20) - V(10) = 10 \ln 101 - 10 \ln 26 = 10 \ln\left(\frac{101}{26}\right) \approx 13,6$ litres. (1)
- d) $r'(t) = \frac{20(t^2+4) - 20t \times 2t}{(t^2+4)^2} = \frac{20(4-t^2)}{(t^2+4)^2}$; sur $[0 ; 30]$, r' est positive avant 2 et négative après, donc r atteint son maximum en $t = 2$, avec $r(2) = \frac{40}{8} = 5$ litres par minute. (1)

Repère — Un volume se déduit d'un débit par primitivation, et la condition « réservoir vide au départ » fixe la constante.