

Devoir surveillé – Matrices et graphes

Matrices, produit matriciel et matrice d'adjacence d'un graphe pour compter des chemins : chapitre d'approfondissement, hors programme de l'option.

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths complémentaires (option Tle) Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Opérations sur les matrices

(4 pts)

- a) On pose $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$.
a) Calculer $A + B$.
b) Calculer $2B - A$.
c) Calculer AB .
d) Calculer BA et conclure.

Exercice 2 – Formats et produit rectangulaire

(4 pts)

- a) On pose $C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ et $D = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$.
a) Donner les formats de C , de D , de CD et de DC .
b) Calculer CD .
c) Calculer le coefficient de la ligne 2 et de la colonne 3 de DC .
d) Un élève écrit $CD = DC$. Expliquer pourquoi c'est faux, sans calculer DC en entier.

Exercice 3 – Réseau de bornes de recharge

(4 pts)

- a) Quatre bornes B_1, B_2, B_3, B_4 sont reliées par des chemins praticables dans les deux sens : B_1-B_2 , B_1-B_3 , B_1-B_4 , B_2-B_3 et B_3-B_4 . Les sommets sont rangés dans cet ordre.
a) Écrire la matrice d'adjacence M .
b) Donner le degré de chaque borne et retrouver le nombre de chemins du réseau.
c) Calculer M^2 .
d) Combien de trajets en exactement deux étapes relient B_2 à B_4 ? Les citer.

Exercice 4 – Deux formules de restauration

(4 pts)

- a) Dans un lycée, 600 élèves choisissent chaque semaine entre la formule « plat du jour » et la formule « buffet ». D'une semaine à l'autre, 70 % des élèves du plat du jour y restent, et 45 % des élèves du buffet passent au plat du jour. La première semaine, 400 élèves prennent le plat du jour et 200 le buffet. On note X_n la matrice ligne des effectifs, dans l'ordre plat du jour puis buffet, et on conservera les valeurs décimales du modèle.
a) Écrire la matrice T telle que $X_{n+1} = X_n T$.
b) Calculer X_1 .
c) Calculer X_2 .
d) Montrer que la répartition (360 ; 240) n'évolue plus d'une semaine à l'autre.

Exercice 5 – Chemins dans un graphe orienté*(4 pts)*

- a) Un graphe orienté a pour sommets I, J, K, L, rangés dans cet ordre, et pour arcs $I \rightarrow J$, $I \rightarrow K$, $J \rightarrow L$, $K \rightarrow I$ et $L \rightarrow K$.
- a) Écrire la matrice d'adjacence M .
- b) b) Calculer M^2 .
- c) c) Calculer M^3 , puis déterminer le nombre de chemins de longueur 3 allant de I à K et les citer.
- d) d) Un élève affirme que, le coefficient ligne I colonne K de M^2 étant nul, aucun chemin ne relie I à K. Expliquer l'erreur.

Bon courage !