

Corrigé et barème – Matrices et graphes

Matrices, produit matriciel et matrice d'adjacence d'un graphe pour compter des chemins : chapitre d'approfondissement, hors programme de l'option.

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths complémentaires (option Tle) Terminale

Exercice 1 – Opérations sur les matrices

(4 pts)

- Coefficient par coefficient : $4 + 0 = 4$, $1 + (-5) = -4$, $-2 + 6 = 4$, $3 + 2 = 5$, d'où $A + B = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$. (1)
- $2B = [0 - 10; 124]$, puis on retranche A : $0 - 4 = -4$, $-10 - 1 = -11$, $12 - (-2) = 14$, $4 - 3 = 1$, d'où $2B - A = \begin{bmatrix} -4 & -11 \\ 14 & 1 \end{bmatrix}$. (1)
- $4 \times 0 + 1 \times 6 = 6$; $4 \times (-5) + 1 \times 2 = -18$; $-2 \times 0 + 3 \times 6 = 18$; $-2 \times (-5) + 3 \times 2 = 16$. Donc $AB = \begin{bmatrix} 6 & -18 \\ 18 & 16 \end{bmatrix}$. (1)
- $0 \times 4 + (-5) \times (-2) = 10$; $0 \times 1 + (-5) \times 3 = -15$; $6 \times 4 + 2 \times (-2) = 20$; $6 \times 1 + 2 \times 3 = 12$. Donc $BA = \begin{bmatrix} 10 & -15 \\ 20 & 12 \end{bmatrix}$: $AB \neq BA$, le produit n'est pas commutatif. (1)

Le point clé — Les deux produits existent, mais aucun coefficient ne coïncide : l'ordre des facteurs fait partie du calcul.

Exercice 2 – Formats et produit rectangulaire

(4 pts)

- C est de format 2×3 et D de format 3×2 . Donc CD est de format 2×2 et DC de format 3×3 . (1)
- $3 \times 1 + (-1) \times 2 + 2 \times (-3) = -5$; $3 \times 4 + (-1) \times 0 + 2 \times 6 = 24$; $0 \times 1 + 5 \times 2 + 1 \times (-3) = 7$; $0 \times 4 + 5 \times 0 + 1 \times 6 = 6$. Donc $CD = \begin{bmatrix} -5 & 24 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$. (1)
- C'est la ligne 2 de D , soit $(2; 0)$, contre la colonne 3 de C , soit $(2; 1)$: $2 \times 2 + 0 \times 1 = 4$. (1)
- Les deux produits n'ont pas le même format (2×2 contre 3×3) : ils ne peuvent pas être égaux, aucun calcul supplémentaire n'est nécessaire. (1)

Erreur fréquente — Annoncer le format du résultat avant de calculer évite la moitié des erreurs de produit.

Exercice 3 – Réseau de bornes de recharge

(4 pts)

- Ligne $B1$: 0, 1, 1, 1 ; ligne $B2$: 1, 0, 1, 0 ; ligne $B3$: 1, 1, 0, 1 ; ligne $B4$: 1, 0, 1, 0. Donc $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, symétrique et de diagonale nulle. (1)
- Degrés : 3 pour $B1$, 2 pour $B2$, 3 pour $B3$, 2 pour $B4$. La somme vaut 10, et chaque chemin est compté deux fois : le réseau comporte 5 chemins. (1)
- Ligne $B1 = \text{lignes } B2 + B3 + B4 = (3, 1, 2, 1)$; ligne $B2 = \text{lignes } B1 + B3 = (1, 2, 1, 2)$; ligne $B3 = \text{lignes } B1 + B2 + B4 = (2, 1, 3, 1)$; ligne $B4 = \text{lignes } B1 + B3 = (1, 2, 1, 2)$. Donc $M^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. (1)
- Le coefficient ligne $B2$, colonne $B4$ de M^2 vaut 2 : les trajets sont $B2-B1-B4$ et $B2-B3-B4$. (1)

Repère — La somme des degrés vaut toujours le double du nombre d'arêtes : c'est le contrôle le plus rapide d'une matrice d'adjacence.

Exercice 4 – Deux formules de restauration

(4 pts)

- a) 70 % restent au plat du jour, donc 30 % passent au buffet ; 45 % des élèves du buffet passent au plat du jour, donc 55 % y restent : $T = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.45 & 0.55 \end{bmatrix}$, chaque ligne totalisant 1. (1)
- b) $400 \times 0,7 + 200 \times 0,45 = 280 + 90 = 370$ et $400 \times 0,3 + 200 \times 0,55 = 120 + 110 = 230$, donc $X_1 = (370 ; 230)$. (1)
- c) $370 \times 0,7 + 230 \times 0,45 = 259 + 103,5 = 362,5$ et $370 \times 0,3 + 230 \times 0,55 = 111 + 126,5 = 237,5$, donc $X_2 = (362,5 ; 237,5)$; le total reste 600. (1)
- d) $360 \times 0,7 + 240 \times 0,45 = 252 + 108 = 360$ et $360 \times 0,3 + 240 \times 0,55 = 108 + 132 = 240$: le produit redonne (360 ; 240), la répartition est stable. (1)

À retenir — Un état est stable lorsque le produit par T le laisse inchangé : les départs compensent exactement les arrivées.

Exercice 5 – Chemins dans un graphe orienté

(4 pts)

- a) Ligne I : 0, 1, 1, 0 ; ligne J : 0, 0, 0, 1 ; ligne K : 1, 0, 0, 0 ; ligne L : 0, 0, 1, 0. Donc $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, non symétrique. (1)
- b) Ligne I = lignes J + K = (1, 0, 0, 1) ; ligne J = ligne L = (0, 0, 1, 0) ; ligne K = ligne I = (0, 1, 1, 0) ; ligne L = ligne K = (1, 0, 0, 0). Donc $M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (1)
- c) En reprenant les lignes de $M^2 : M^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Le coefficient ligne I, colonne K vaut 2 : les chemins sont $I \rightarrow J \rightarrow L \rightarrow K$ et $I \rightarrow K \rightarrow I \rightarrow K$. (1)
- d) Ce coefficient ne compte que les chemins de longueur exactement 2. Or I et K sont reliés par l'arc direct $I \rightarrow K$, compté dans M et non dans M^2 : l'élève confond « aucun chemin de longueur 2 » et « aucun chemin ». (1)

Attention — Un coefficient nul dans une puissance n'interdit rien : il faut préciser la longueur des chemins que l'on compte.