Lois discrètes : uniforme, Bernoulli, binomiale

Fiche méthode

(Maths complémentaires Terminale · Probabilités · Lois discrètes)

La démarche pour une question de probabilités

1. Je définis la variable : ce qu'elle compte ou mesure, et ses valeurs possibles.

2. Je reconnais la loi : uniforme, Bernoulli, binomiale (trois points à justifier), ou loi donnée par un tableau.

3. Je traduis l'événement avec $=$, $\leqslant$ ou $\geqslant$ (« au moins », « au plus », « entre ») et je passe au contraire si c'est plus court.

4. Je calcule et je conclus par une phrase dans le contexte, en n'arrondissant qu'à la fin.

Le réflexe — « X suit la loi $\mathcal{B}(n\,;p)$ » ne vaut des points que si les deux paramètres sont donnés et si les trois points (deux issues, épreuves identiques, indépendance) sont justifiés.

Cas 1 · Loi, espérance, variance

Réflexe — tableau de la loi (somme = 1), ligne des carrés, König-Huygens ; linéarité pour aX + b.

Exemple. Questions types : « Calculer $E(X)$ et $V(X)$ », « Le jeu est-il équitable ? ». Exemple : X prend les valeurs -1, 2, 6 avec les probabilités 0,5 ; 0,4 ; 0,1.

Contrôle : $0{,}5 + 0{,}4 + 0{,}1 = 1$.

$E(X) = -0{,}5 + 0{,}8 + 0{,}6 = 0{,}9$ et $E(X^2) = 0{,}5 + 1{,}6 + 3{,}6 = 5{,}7$.

$V(X) = 5{,}7 - 0{,}9^2 = 5{,}7 - 0{,}81 = 4{,}89$ et $\sigma(X) = \sqrt{4{,}89} \approx 2{,}21$. Si le gain net est $X - 1$, $E(X-1) = -0{,}1$: jeu défavorable.

Attention — $E(X^2)$ n'est pas $E(X)^2$; l'équité se juge sur le gain net, mise retirée.

Cas 2 · Loi uniforme, loi de Bernoulli

Réflexe — uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$: $1/n$ et $(n+1)/2$; Bernoulli : je nomme le succès, puis $E = p$ et $V = p(1-p)$.

Exemple. Questions types : « Justifier que X suit une loi uniforme », « Donner la loi de Y et son écart type ». Exemple : un nombre N est tiré au hasard entre 1 et 30 ; $Y = 1$ si $N \leqslant 6$, 0 sinon.

N suit la loi uniforme sur $\{1, \ldots, 30\}$: $E(N) = \dfrac{31}{2} = 15{,}5$.

$P(Y = 1) = P(N \leqslant 6) = \dfrac{6}{30} = 0{,}2$: Y suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,2.

$V(Y) = 0{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}16$ et $\sigma(Y) = 0{,}4$.

Attention — $(n+1)/2$ et non $n/2$; l'écart type est la racine de $p(1-p)$.

Cas 3 · Schéma de Bernoulli et arbre

Réflexe — deux issues + épreuves identiques + indépendantes ; produit le long d'un chemin, somme des chemins ; « au moins un » par le contraire.

Exemple. Questions types : « Justifier qu'il s'agit d'un schéma de Bernoulli », « Probabilité d'au moins un succès ». Exemple : 4 épreuves indépendantes de paramètre 0,1.

Aucun succès : un seul chemin, de probabilité $0{,}9^4 = 0{,}6561$.

Au moins un succès : $1 - 0{,}6561 = 0{,}3439$.

Exactement un succès : 4 chemins de probabilité $0{,}1 \times 0{,}9^3 = 0{,}0729$, soit 0,2916.

Attention — tirages sans remise dans une petite urne : pas de schéma de Bernoulli.

Cas 4 · Coefficients binomiaux

Réflexe — triangle de Pascal pour un petit n, calculatrice sinon ; symétrie pour aller plus vite.

Exemple. Questions types : « Écrire la ligne suivante du triangle », « Donner $\binom{n}{k}$ sans calcul ». Exemple : à partir de la ligne $n = 4$: $1, 4, 6, 4, 1$.

Ligne $n = 5$: $1, 1+4=5, 4+6=10, 6+4=10, 4+1=5, 1$.
Donc $\binom{5}{2} = 10$ et, par symétrie, $\binom{5}{3} = 10$.
Contrôle : $1+5+10+10+5+1 = 32 = 2^5$.

Attention — on numérote à partir de k = 0 ; Pascal additionne deux voisins de la même ligne.

Cas 5 · Loi binomiale

Réflexe — « X suit B(n ; p) » justifié, formule complète, cumul avec « ≤ » à la calculatrice, E = np.

Exemple. Questions types : « Calculer $P(X = k)$, $P(X \geqslant k)$ », « Calculer $E(X)$ et interpréter ». Exemple : X suit $\mathcal{B}(6\,;0{,}5)$.

$P(X = 2) = \binom{6}{2} \times 0{,}5^6 = \dfrac{15}{64} \approx 0{,}234$.
$P(X \geqslant 5) = P(X = 5) + P(X = 6) = \dfrac{6+1}{64} = \dfrac{7}{64} \approx 0{,}109$.
$E(X) = 6 \times 0{,}5 = 3$ et $\sigma(X) = \sqrt{1{,}5} \approx 1{,}22$.

Attention — ne pas oublier le coefficient ; $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1)$.

Cas 6 · Seuils et intervalles

Réflexe — seuil sur n : logarithme, sens changé, entier au-dessus ; seuil sur k : deux valeurs du tableau qui encadrent.

Exemple. Questions types : « Combien d'épreuves pour que $P(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}9$? », « Plus petit k tel que $P(X \leqslant k) \geqslant 0{,}95$ ». Exemple : $p = 0{,}2$ et $P(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}9$.

$1 - 0{,}8^n \geqslant 0{,}9 \iff 0{,}8^n \leqslant 0{,}1 \iff n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}8} \approx 10{,}3$.
Contrôle : $0{,}8^{10} \approx 0{,}107$ et $0{,}8^{11} \approx 0{,}086$.
Il faut au moins 11 épreuves.

Attention — diviser par $\ln(1-p) < 0$ change le sens ; on compare des valeurs non arrondies.

Les pièges

- $p^k(1-p)^{n-k}$ est la probabilité d'un seul chemin : multiplier par le coefficient binomial.
- $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1)$, et « moins de k » se calcule par $P(X \leq k-1)$.
- Pas de loi binomiale sans indépendance : tirages sans remise dans une petite population.
- Le succès est ce que l'on compte, même s'il est fâcheux (pièce défectueuse).
- $V(X) = np(1-p)$; l'écart type est sa racine. $np = 1$ est un nombre moyen, pas une probabilité.
- Loi uniforme : $E(X) = (n+1)/2$, seulement pour les valeurs $1, \ldots, n$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).