Lois discrètes : uniforme, Bernoulli, binomiale

Fiche tableaux : les résultats à connaître
(Maths complémentaires Terminale)

Variable aléatoire : les formules de 1re

Notion	Formule
Loi	$P(X=x_1)+\cdots+P(X=x_r)=1$
Espérance	$E(X)=\sum p_i x_i$
Variance	$V(X)=E(X^2)-\big(E(X)\big)^2$
Écart type	$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$
Linéarité	$E(aX+b)=aE(X)+b$
Jeu équitable	$E(\text{gain net})=0$

Exemple : X vaut 0, 5 ou 10 avec les probabilités 0,6 ; 0,3 ; 0,1 : $E(X)=2{,}5$, $E(X^2)=17{,}5$, $V(X)=17{,}5-6{,}25=11{,}25$.

Les trois lois usuelles

Loi	Valeurs	$P(X=k)$	$E(X)$	$V(X)$
Uniforme sur $\{1,\dots,n\}$	$1,\dots,n$	$\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{n+1}{2}$	—
Bernoulli de paramètre p	0 ou 1	$P(X=1)=p$	p	$p(1-p)$
Binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$	$0,1,\dots,n$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$

Exemple : X suit $\mathcal{B}(40\,;0{,}25)$: $E(X)=10$, $V(X)=7{,}5$, $\sigma(X)=\sqrt{7{,}5}\approx 2{,}74$.

Triangle de Pascal et coefficients binomiaux

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

$\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$, $\binom{n}{1}=n$, $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$. Exemple : $\binom{8}{6}=\binom{8}{2}=28$.

Traduire un événement

Phrase	Événement	Calcul avec la fonction cumulée
au plus k	$X \leqslant k$	$P(X \leqslant k)$
moins de k	$X \leqslant k-1$	$P(X \leqslant k-1)$
au moins k	$X \geqslant k$	$1 - P(X \leqslant k-1)$
plus de k	$X \geqslant k+1$	$1 - P(X \leqslant k)$
entre a et b	$a \leqslant X \leqslant b$	$P(X \leqslant b) - P(X \leqslant a-1)$
au moins un succès	$X \geqslant 1$	$1 - (1-p)^n$

Exemple : « au moins 3 » pour X de loi $\mathcal{B}(10\,;0{,}1)$: $1 - P(X \leqslant 2)$.

Calculatrice

Calculatrice	$P(X = k)$, puis $P(X \leqslant k)$
TI	binomFdp(n, p, k) ; binomFRép(n, p, k)
Casio	Binomial PD ; Binomial CD
NumWorks	Probabilités › Binomiale, puis le calcul de $P(X = k)$ ou de $P(X \leqslant k)$

Coefficient $\binom{n}{k}$: n Combinaison k (TI), n nCr k (Casio), binomial(n, k) (NumWorks). Pour une probabilité, on entre, dans l'ordre, n, p, puis k. Exemple : binomFRép(10, 0.1, 2) donne $P(X \leqslant 2) \approx 0{,}930$.

Seuils et intervalles

On cherche…	Méthode
le plus petit n tel que $P(X \geqslant 1) \geqslant s$	$n \geqslant \dfrac{\ln(1-s)}{\ln(1-p)}$, puis l'entier au-dessus
le plus petit k tel que $P(X \leqslant k) \geqslant 1-\alpha$	tableau des $P(X \leqslant k)$, deux valeurs qui encadrent
un intervalle $[a\,;b]$ de probabilité $\geqslant 1-\alpha$	a : plus petit avec $P(X \leqslant a) > \dfrac{\alpha}{2}$; b : plus petit avec $P(X \leqslant b) \geqslant 1 - \dfrac{\alpha}{2}$

Exemple : $p = 0{,}3$ et $s = 0{,}95$: $n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}7} \approx 8{,}4$, donc $n = 9$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).