

Corrigé et barème – Lois discrètes : loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale

Loi uniforme discrète, épreuve et loi de Bernoulli, schéma de Bernoulli, coefficients binomiaux, loi binomiale, espérance et variance

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths complémentaires (option Tle) Terminale

Exercice 1 – Loi uniforme et loi de Bernoulli

(4 pts)

- a) Loi uniforme sur $\{1, \dots, 16\}$: $P(D = k) = \frac{1}{16}$; $E(D) = \frac{16+1}{2} = 8,5$. (1)
- b) Les entiers de 3 à 12 sont au nombre de $12 - 3 + 1 = 10$: $P = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} = 0,625$. (1)
- c) Deux issues ; $P(B = 1) = P(D \leq 5) = \frac{5}{16}$: loi de Bernoulli de paramètre $\frac{5}{16} = 0,3125$. (1)
- d) $E(B) = \frac{5}{16}$; $V(B) = \frac{5}{16} \times \frac{11}{16} = \frac{55}{256} \approx 0,2148$. (1)

Erreur fréquente — Les entiers de 3 à 12 sont au nombre de $12 - 3 + 1 = 10$, et non 9.

Exercice 2 – Coefficients binomiaux

(4 pts)

- a) Chaque terme est la somme des deux termes voisins de la ligne 10 : 1, 11, 55, 165, 330, 462, 462, 330, 165, 55, 11, 1. (1)
- b) $\binom{11}{4} = 330$; par symétrie, $\binom{11}{7} = \binom{11}{11-7} = \binom{11}{4} = 330$. (1)
- c) $\binom{11}{3} = 165$ chemins. (1)
- d) La relation de Pascal additionne deux termes consécutifs : $\binom{11}{2} = \binom{10}{1} + \binom{10}{2} = 10 + 45 = 55$. (1)

À retenir — La relation de Pascal ajoute deux termes voisins de la ligne précédente, jamais deux fois le même terme.

Exercice 3 – Schéma de Bernoulli et arbre

(4 pts)

- a) 3 épreuves à deux issues (succès « lancer réussi », $p = 0,85$), identiques et indépendantes : schéma de Bernoulli, $n = 3$, $p = 0,85$. (1)
- b) Un seul chemin : $0,85^3 = 0,614125$. (1)
- c) 3 chemins de probabilité $0,85 \times 0,15^2$: $3 \times 0,85 \times 0,0225 = 0,057375$. (1)
- d) $P(2) = 3 \times 0,85^2 \times 0,15 = 0,325125$; au moins 2 : $0,325125 + 0,614125 = 0,93925$. (1)

Attention — Oublier le facteur 3, nombre de chemins, divise le résultat par trois : c'est l'erreur la plus coûteuse de l'exercice.

Exercice 4 – Loi binomiale et calculatrice

(4 pts)

- a) Épreuve « emprunt rendu en retard » ($p = 0,16$), répétée 17 fois de façon identique et indépendante : $X \sim \mathcal{B}(17; 0,16)$. (1)
- b) $\binom{17}{2} \times 0,16^2 \times 0,84^{15} = 136 \times 0,0256 \times 0,84^{15} \approx 0,2547$. (1)
- c) $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) \approx 1 - (0,0516 + 0,1671 + 0,2547) \approx 0,5266$. (1)
- d) $E(X) = 17 \times 0,16 = 2,72$; $V(X) = 2,72 \times 0,84 = 2,2848$; en moyenne 2,72 retards pour 17 emprunts. (1)

Le point clé — $P(X \geq 3)$ se calcule par $1 - P(X \leq 2)$: la borne passe de 3 à 2.

Exercice 5 – Nombre minimal de visiteurs*(4 pts)*

- a) $Y \sim \mathcal{B}(n; 0,04)$, donc $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0,96^n$. (1)
- b) $1 - 0,96^n \geq 0,9 \Leftrightarrow -0,96^n \geq -0,1 \Leftrightarrow 0,96^n \leq 0,1$. (1)
- c) $n \ln 0,96 \leq \ln 0,1$; $\ln 0,96$ est négatif, d'où $n \geq \frac{\ln 0,1}{\ln 0,96} \approx 56,4 : n = 57$ ($0,96^{56} \approx 0,1017$, $0,96^{57} \approx 0,0976$). (1)
- d) La boucle augmente n tant que $1 - 0,96^n$ reste sous 0,9 ; elle s'arrête au premier n qui convient : `seuil()` renvoie 57. (1)

Astuce — Diviser par $\ln 0,96$, qui est négatif, renverse l'inégalité ; on contrôle ensuite les entiers $n - 1$ et n .

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).