

Devoir surveillé – Loi normale

Loi de Gauss, courbe en cloche et intervalles à un, deux et trois écarts types — approfondissement, hors programme de l'option (Tle)

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths complémentaires (option Tle) Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Loi normale centrée réduite

(4 pts)

- a) Z suit la loi normale centrée réduite. Calculer $P(Z \leq 2,17)$, arrondie à 10^{-4} .
- b) Calculer $P(Z \geq -0,42)$.
- c) Calculer $P(0,35 \leq Z \leq 1,85)$.
- d) Déterminer le réel $u > 0$ tel que $P(-u \leq Z \leq u) = 0,50$, arrondi à 10^{-4} .

Exercice 2 – Standardisation

(4 pts)

- a) La masse X d'un galet calibré, en grammes, suit $\mathcal{N}(64,5; 3,2^2)$. Calculer la valeur standardisée de $x = 70,9$.
- b) En déduire $P(X \leq 70,9)$, arrondie à 10^{-4} .
- c) Calculer $P(X \geq 61,3)$.
- d) Calculer $P(62 \leq X \leq 68)$.

Exercice 3 – Seuils et intervalles

(4 pts)

- a) La durée X d'un trajet de bus, en minutes, suit $\mathcal{N}(20,6; 1,4^2)$. Déterminer, à 10^{-1} près, la durée t dépassée par seulement 10 % des trajets.
- b) Déterminer un intervalle centré sur 20,6 contenant environ 95 % des durées.
- c) Calculer la probabilité qu'un trajet dure plus de 24 minutes.
- d) Comparer $P(X \leq 19,2)$ et $P(X \geq 22,0)$ en justifiant sans calculatrice, puis donner leur valeur commune.

Exercice 4 – Contrôle de qualité

(4 pts)

- a) L'épaisseur X des plaques sortant d'une presse, en millimètres, suit $\mathcal{N}(5,06; 0,065^2)$; la tolérance est $[4,80; 5,20]$. Calculer la proportion de plaques conformes, arrondie à 10^{-4} .
- b) Calculer la proportion de plaques rejetées parce que trop épaisses.
- c) La presse est recentrée sur 5,00 mm sans changer l'écart type. Calculer la nouvelle proportion de plaques conformes.
- d) Sur une production de 12 000 plaques, déterminer le nombre de rebuts évités grâce au recentrage.

Exercice 5 – Raisonner sur la loi normale*(4 pts)*

- a) La variable X suit $\mathcal{N}(30; 16)$. Un élève écrit : « $P(X \leq 30) = 0,5$ et $\sigma = 16$ ». Dire ce qui est exact, corriger ce qui est faux.
- b) Montrer que, pour toute loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$, la probabilité $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$ ne dépend ni de μ ni de σ .
- c) Calculer $P(X \geq 37)$, arrondie à 10^{-4} .
- d) Un contrôleur affirme : « comme 99,7 % des valeurs appartiennent à $[18; 42]$, aucune des 5 000 pièces du lot ne sortira de cet intervalle ». Critiquer cette affirmation par un calcul.

Bon courage !