

Corrigé et barème – Loi normale

Loi de Gauss, courbe en cloche et intervalles à un, deux et trois écarts types — approfondissement, hors programme de l'option (Tle)

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Maths complémentaires (option Tle) Terminale

Exercice 1 – Loi normale centrée réduite

(4 pts)

- a) Lecture directe à la calculatrice (bornes -10^{99} et 2,17) : $P(Z \leq 2,17) \approx 0,9850$. (1)
- b) Par symétrie, $P(Z \geq -0,42) = P(Z \leq 0,42) \approx 0,6628$. (1)
- c) $\Phi(1,85) - \Phi(0,35) = 0,9678 - 0,6368 = 0,3310$. (1)
- d) $2\Phi(u) - 1 = 0,50$ donne $\Phi(u) = 0,75$, d'où $u \approx 0,6745$ (c'est le troisième quartile de la loi centrée réduite). (1)

Erreur fréquente — Une probabilité $P(Z \geq a)$ ne se lit jamais directement : il faut passer au complémentaire ou saisir 10^{99} comme borne supérieure.

Exercice 2 – Standardisation

(4 pts)

- a) $z = \frac{70,9-64,5}{3,2} = \frac{6,4}{3,2} = 2$: la masse 70,9 g est à deux écarts types au-dessus de la moyenne. (1)
- b) $P(X \leq 70,9) = \Phi(2) \approx 0,9772$. (1)
- c) $\frac{61,3-64,5}{3,2} = -1$, donc $P(X \geq 61,3) = P(Z \geq -1) = \Phi(1) \approx 0,8413$. (1)
- d) Bornes standardisées $\frac{62-64,5}{3,2} \approx -0,78125$ et $\frac{68-64,5}{3,2} \approx 1,09375$, d'où $0,8630 - 0,2173 = 0,6456$. (1)

Le point clé — Les deux bornes d'un encadrement doivent être standardisées, avec le même μ et le même σ .

Exercice 3 – Seuils et intervalles

(4 pts)

- a) $P(X \leq t) = 0,90$ donne $z \approx 1,2816$, d'où $t = 20,6 + 1,2816 \times 1,4 = 22,394 \approx 22,4$ min. (1)
- b) Avec le coefficient 1,96 : $1,96 \times 1,4 = 2,744$, donc l'intervalle est $[17,9 ; 23,3]$ (bornes arrondies à 10^{-1}). (1)
- c) $z = \frac{24-20,6}{1,4} \approx 2,4286$, donc $P(X > 24) = 1 - 0,9924 = 0,0076$, soit 0,76 % des trajets. (1)
- d) $19,2 = \mu - \sigma$ et $22,0 = \mu + \sigma$: par symétrie de la densité, les deux probabilités sont égales, et valent $\frac{1-0,683}{2} \approx 0,1587$. (1)

Repère — 1,96 pour 95 % et 2,58 pour 99 % sont les deux coefficients à connaître par cœur pour un intervalle centré.

Exercice 4 – Contrôle de qualité

(4 pts)

- a) Bornes standardisées $\frac{4,80-5,06}{0,065} = -4$ et $\frac{5,20-5,06}{0,065} \approx 2,1538$; proportion = $0,9844 - 0,0000 = 0,9843$. (1)
- b) $1 - \Phi(2,1538) \approx 0,0156$, soit 1,56 % : la quasi-totalité des rebuts vient du côté épais. (1)
- c) Bornes à $\pm \frac{0,20}{0,065} \approx \pm 3,0769$, donc $2\Phi(3,0769) - 1 \approx 0,9979$. (1)
- d) Avant : $12\,000 \times 0,0157 \approx 188$ rebuts ; après : $12\,000 \times 0,0021 \approx 25$ rebuts ; environ 163 plaques sauvées, sans toucher à la machine. (1)

Attention — Un procédé régulier mais décentré produit des rebuts d'un seul côté : le recentrage est souvent le réglage le plus rentable.

Exercice 5 – Raisonner sur la loi normale*(4 pts)*

- a) $P(X \leq 30) = 0,5$ est exact (30 est l'espérance, la densité est symétrique autour de $x = 30$). En revanche 16 est la variance : $\sigma = \sqrt{16} = 4$. (1)
- b) En posant $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, l'encadrement $\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma$ équivaut à $-1 \leq Z \leq 1$; or Z suit $\mathcal{N}(0; 1)$, donc la probabilité vaut $\Phi(1) - \Phi(-1) \approx 0,683$, indépendamment de μ et de σ . (1)
- c) $z = \frac{37-30}{4} = 1,75$, donc $P(X \geq 37) = 1 - 0,9599 = 0,0401$. (1)
- d) $[18; 42] = [\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]$ laisse dehors 0,27 % des valeurs : on attend $5\,000 \times 0,0027 \approx 13$ pièces hors de l'intervalle. Une loi normale prend ses valeurs sur $\mathbb{R}$: elle n'interdit aucune valeur, elle les rend seulement improbables. (1)

À retenir — « 99,7 % » n'est pas « toutes » : sur une grande série, le reste (0,27 %) représente un nombre de pièces bien réel.