Loi géométrique : temps d'attente discret

Fiche méthode

(Maths complémentaires Terminale · Probabilités · Loi géométrique)

La démarche pour une question de temps d'attente

1. Je définis la variable : X est le rang du premier succès, et je nomme ce succès.

2. Je justifie la loi : épreuve de Bernoulli de paramètre p, répétée de façon identique et indépendante jusqu'au premier succès, donc X suit $\mathcal{G}(p)$.

3. Je traduis l'événement en « $X = k$ », « $X > k$ », « $X \leqslant k$ », ou « sachant $X > m$ », et je ramène tout à $P(X > k) = (1-p)^k$.

4. Je calcule et je conclus par une phrase dans le contexte, en n'arrondissant qu'à la fin.

Le réflexe — « X suit $\mathcal{G}(p)$ » ne vaut des points que si le succès est nommé, p donné, l'indépendance justifiée et X décrit comme le rang du premier succès.

Cas 1 · Rappels : conditionnelle et somme géométrique

Réflexe — événement inclus : l'intersection est le plus petit ; somme de puissances : $(1 - q^n)/(1 - q)$.

Exemple. Questions types : « Calculer $P_A(B)$ », « Calculer la somme $1 + q + \cdots + q^{n-1}$ ». Exemple : $B \subset A$, $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}24$; puis $1 + 0{,}9 + \cdots + 0{,}9^9$.

$A \cap B = B$, donc $P_A(B) = \dfrac{0{,}24}{0{,}6} = 0{,}4$.

La somme a 10 termes : $\dfrac{1 - 0{,}9^{10}}{1 - 0{,}9} \approx 6{,}513$.

Attention — P_A(B) n'est pas P(A ∩ B) ; n termes donnent q^n au numérateur.

Cas 2 · Reconnaître la loi géométrique

Réflexe — rang du premier succès, épreuves identiques et indépendantes ; $k - 1$ échecs puis un succès.

Exemple. Questions types : « Justifier que X suit une loi géométrique », « Calculer $P(X = k)$ ». Exemple : $p = 0{,}25$, $P(X = 3)$.

Deux échecs puis un succès : $P(X = 3) = 0{,}75^2 \times 0{,}25$.

$P(X = 3) = 0{,}5625 \times 0{,}25 = 0{,}140625$.

Contrôle : chaque probabilité vaut 0,75 fois la précédente (0,25 ; 0,1875 ; 0,140625).

Attention — exposant $k - 1$; un nombre de succès sur n épreuves fixées suit une loi binomiale.

Cas 3 · P(X > k), P(X ⩽ k) et seuil

Réflexe — $P(X > k) = (1 - p)^k$, puis contraire ou différence ; seuil par le logarithme, sens changé.

Exemple. Questions types : « Calculer $P(X > k)$, $P(X \leqslant k)$ », « Plus petit n tel que $P(X \leqslant n) \geqslant s$ ». Exemple : $p = 0{,}3$.

$P(X > 4) = 0{,}7^4 = 0{,}2401$ et $P(X \leqslant 4) = 0{,}7599$.

$P(X \leqslant n) \geqslant 0{,}99 \iff 0{,}7^n \leqslant 0{,}01 \iff n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}7} \approx 12{,}9$.

Contrôle : $0{,}7^{12} \approx 0{,}0138$ et $0{,}7^{13} \approx 0{,}0097$: $n = 13$.

Attention — $P(X \geq k) = (1 - p)^{k-1}$; on divise par un logarithme négatif.

Cas 4 · Espérance et simulation

Réflexe — E(X) = 1/p, interprété comme un temps d'attente moyen ; linéarité pour un coût.

Exemple. Questions types : « Calculer et interpréter $E(X)$ », « Que renvoie la fonction Python ? ». Exemple : $p = 0{,}05$, chaque essai coûte 3 €.

$E(X) = \dfrac{1}{0{,}05} = 20$: en moyenne, le premier succès arrive au 20e essai.

Coût moyen : $E(3X) = 3 \times 20 = 60$ €.

La boucle `while random() >= p` tourne tant qu'il y a échec.

Attention — 1/p n'est pas la valeur la plus probable (c'est 1).

Cas 5 · Absence de mémoire

Réflexe — sachant X > m : je retire m ; démonstration par le quotient q^(m+n)/q^m.

Exemple. Questions types : « Calculer $P_{X>m}(X > m+n)$ », « Démontrer la propriété d'absence de mémoire ». Exemple : $p = 0{,}1$, $P_{X>7}(X > 10)$.

$\{X > 10\} \subset \{X > 7\}$, donc le quotient vaut $\dfrac{0{,}9^{10}}{0{,}9^{7}}$.

$P_{X>7}(X > 10) = 0{,}9^3 = 0{,}729$, égal à $P(X > 3)$.

Attention — le succès n'est jamais « dû » ; sans remise, pas d'absence de mémoire.

Les pièges

- $P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$: l'exposant compte les échecs avant le succès, soit $k-1$.
- $P(X > k) = (1-p)^k$ mais $P(X \geq k) = (1-p)^{k-1}$.
- Rang du premier succès : loi géométrique ; nombre de succès sur n épreuves : loi binomiale.
- $E(X) = 1/p$ est une moyenne, pas un rang garanti ni la valeur la plus probable.
- Le succès n'est pas plus probable après une longue série d'échecs (absence de mémoire).
- Un seuil sur n se conclut par un entier, après contrôle des deux entiers voisins.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).