Loi géométrique : temps d'attente discret

Fiche tableaux : les résultats à connaître
(Maths complémentaires Terminale)

La loi géométrique $\mathcal{G}(p)$

Notion	Formule
Valeurs	$1, 2, 3, \ldots$ (rang du premier succès)
$P(X = k)$	$(1-p)^{k-1}\,p$
$P(X > k)$	$(1-p)^k$
$P(X \leqslant k)$	$1-(1-p)^k$
Espérance (admise)	$E(X) = \dfrac{1}{p}$
Valeur la plus probable	1

Exemple : X suit $\mathcal{G}(0{,}44)$: $P(X=2) = 0{,}56 \times 0{,}44 = 0{,}2464$, $P(X>2) = 0{,}56^2 = 0{,}3136$, $E(X) = \dfrac{1}{0{,}44} = \dfrac{25}{11} \approx 2{,}27$.

Traduire un événement

Phrase	Événement	Probabilité
premier succès au rang k	$X = k$	$(1-p)^{k-1}p$
plus de k épreuves	$X > k$	$(1-p)^k$
au plus k épreuves	$X \leqslant k$	$1-(1-p)^k$
au moins k épreuves	$X \geqslant k$	$(1-p)^{k-1}$
entre a et b	$a \leqslant X \leqslant b$	$(1-p)^{a-1} - (1-p)^b$
encore plus de n, sachant plus de m	$X > m+n$ sachant $X > m$	$(1-p)^n$

Exemple : $p = 0{,}6$ et « entre 2 et 4 » : $0{,}4 - 0{,}4^4 = 0{,}4 - 0{,}0256 = 0{,}3744$.

Binomiale ou géométrique ?

	Loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$	Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$
Nombre d'épreuves	fixé : n	non fixé : jusqu'au premier succès
X est	le nombre de succès	le rang du premier succès
Valeurs	$0, 1, \ldots, n$	$1, 2, 3, \ldots$
Espérance	np	$\dfrac{1}{p}$

Lien : aucun succès dans les n premières épreuves, c'est à la fois $\{Y = 0\}$ pour Y de loi $\mathcal{B}(n\,;p)$ et $\{X > n\}$: les deux valent $(1-p)^n$.

Seuil et absence de mémoire

On cherche…	Méthode
le plus petit n tel que $P(X \leqslant n) \geqslant s$	$n \geqslant \dfrac{\ln(1-s)}{\ln(1-p)}$, puis l'entier au-dessus
$P_{X>m}(X > m+n)$	$P(X > n) = (1-p)^n$
$P_{X>m}(X = m+k)$	$P(X = k)$
prouver qu'une loi n'est pas géométrique	un m et un n avec $P_{X>m}(X > m+n) \neq P(X > n)$

Exemple : $p = 0{,}2$ et $s = 0{,}5$: $n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}8} \approx 3{,}1$, donc $n = 4$.

Simuler en Python

Instruction	Rôle
`random() < p`	vrai avec la probabilité p : une épreuve de Bernoulli
`while random() >= p:`	répète tant que l'épreuve échoue
`k = k + 1`	compte une épreuve de plus
`return k`	renvoie le rang du premier succès

La moyenne de nombreuses réalisations est proche de $\dfrac{1}{p}$: pour $p = 0{,}125$, proche de 8.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).