# Devoir surveillé – Loi géométrique : temps d'attente discret

Rappels de 1re sur les probabilités conditionnelles et les suites géométriques, rang du premier succès d'un schéma de Bernoulli et loi géométrique, probabilités P(X > k) et P(X ⩽ k) et seuils, espérance 1/p et simulation en Python, absence de mémoire.

Durée : 90 min – Calculatrice autorisée – Sur 20 points · Maths-complementaires Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

*Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.*

## Exercice 1 – Rappels : probabilité conditionnelle et somme géométrique ★★ *(4 pts)*

Dans une pépinière, on suit de jeunes arbres plantés la même année : $80\,\%$ vivent plus de deux ans (événement $A$) et $62\,\%$ vivent plus de trois ans (événement $B$). Par ailleurs, pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $S_n = 0{,}28\,(1 + 0{,}72 + 0{,}72^2 + \cdots + 0{,}72^{n-1})$.

a) Justifier que $A \cap B = B$, puis calculer $P_A(B)$ et l'interpréter.

b) Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $S_n = 1 - 0{,}72^n$.

c) Calculer $S_5$ (arrondi au dix-millième).

d) Déterminer la limite de $S_n$. Interpréter $S_n$ comme une probabilité $P(X \leqslant n)$ pour une variable $X$ dont on précisera la loi.

## Exercice 2 – Candidatures de stage ★★ *(5 pts)*

Une étudiante envoie des candidatures de stage, une par une. Chacune reçoit une réponse positive avec la probabilité $0{,}24$, indépendamment des autres. $X$ est le rang de la première candidature acceptée.

a) Justifier que $X$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

b) Calculer $P(X = 3)$.

c) Calculer $P(X > 5)$ puis $P(X \leqslant 5)$, arrondies au dix-millième.

d) Calculer la probabilité que la première réponse positive arrive entre la $3^{\text{e}}$ et la $6^{\text{e}}$ candidature (incluses), au dix-millième.

e) Combien de candidatures doit-elle prévoir pour obtenir au moins une réponse positive avec une probabilité d'au moins $0{,}99$ ? Justifier.

## Exercice 3 – Coffres d'un jeu vidéo ★★ *(4 pts)*

Dans un jeu vidéo, chaque coffre ouvert contient un objet légendaire avec la probabilité 0,02, indépendamment des autres coffres. Un joueur ouvre des coffres jusqu'à obtenir un objet légendaire ; $X$ est le nombre de coffres ouverts. On dispose de la fonction Python :

```
from random import random

def coffres():
    k = 1
    while random() >= 0.02:
        k = k + 1
    return k
```

a) Justifier que $X$ suit une loi géométrique, calculer $E(X)$ et interpréter.

b) Chaque coffre coûte 3 pièces d'or. Calculer le coût moyen, en pièces d'or, pour obtenir un objet légendaire.

c) Expliquer ce que renvoie la fonction `coffres()`.

d) Le joueur appelle 10 000 fois `coffres()` et calcule la moyenne des valeurs obtenues. Vers quelle valeur s'attend-il ? Est-ce la valeur de $X$ la plus probable ?

## Exercice 4 – Absence de mémoire ★★★ *(4 pts)*

$X$ suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, avec $0 < p < 1$ ; on pose $q = 1 - p$.

a) Démontrer que, pour tout entier naturel $k$, $P(X > k) = q^k$.

b) Démontrer que $X$ a la propriété d'absence de mémoire : $P_{X>m}(X > m + n) = P(X > n)$ quels que soient les entiers naturels $m$ et $n$.

c) Chaque nuit, une alarme se déclenche à tort avec la probabilité 0,015, indépendamment des autres nuits. Elle ne s'est pas déclenchée pendant 60 nuits. Calculer la probabilité qu'elle ne se déclenche pas non plus pendant les 30 nuits suivantes (au dix-millième).

d) $Y$ suit la loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, 8\}$. Démontrer que $Y$ n'a pas la propriété d'absence de mémoire.

## Exercice 5 – Régler la difficulté d'un jeu ★★★ *(3 pts)*

Un forain règle la probabilité $p$ ($0 < p < 1$) de gagner à chaque essai d'un jeu d'adresse ; les essais sont indépendants et un joueur rejoue jusqu'à gagner. $X$ est le rang du premier essai gagnant.

a) Exprimer $P(X \leqslant 3)$ en fonction de $p$.

b) Déterminer les valeurs de $p$ pour lesquelles $P(X \leqslant 3) \geqslant 0{,}875$.

c) Le forain veut aussi qu'un joueur fasse en moyenne au moins 4 essais. Pour quelles valeurs de $p$ est-ce le cas ? Peut-il satisfaire les deux exigences à la fois ?

*Bon courage !*

*Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).*